Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik,

insbesondere

für Schullehrer und Praktiker.

Von

Johann Andreas Christian Michelsen,

Professor der Mathematik und Physik am Berlinischen Gymnasium.

Zweytes Stück.

Berlin, 1790.

Im Verlage der Königl. Preuß. Akadem. Kunst- und Buchhandlung.

I.

Einige Aufgaben
für
praktische Geometer.

Vorerinnerung.

Ich habe bey diesen Aufgaben nicht bloß die Absicht, praktischen Mathematikern leichte Auflösungen mitzutheilen; sondern es sollen dieselben auch als Beyspiele dienen, um mich darauf künftig bey der Untersuchung der Frage zu berufen: Ob es zur praktischen Anwendung der Mathematik hinlänglich sey, die Sätze derselben historisch gefaßt zu haben? Deswegen ist manches hinzugefügt worden, was sonst allenfalls hätte wegbleiben können. Auf der andern Seite habe ich verschiedenes weggelassen, was einige vielleicht sehr vermissen werden; und dahin gehört

einmal die Nachweisung der Sätze, auf welche sich die Schlußfolgen bey den Beweisen gründen, und zweytens einige bloß für Praktiker nothwendige Erinnerungen. Allein in Beyträgen kann man nicht alles auf einmal liefern; ich hoffe aber, daß diese und die mit ihnen in Verbindung stehenden und für die folgenden Stücke bestimmten Aufgaben, nebst der vorhin gedachten Untersuchung und einer andern über die Frage: Wie müssen Praktiker die theoretische Mathematik gelernt haben? ein nicht unvollständiges und dabey, insbesondere Praktikern, nützliches Ganzes ausmachen werden.

Erste Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie A B, Fig. 16, nach dem äußern und mittlern Verhältnisse, oder so zu theilen, daß der größere Theil die mittlere Proportional-Linie sey zwischen dem kleinern Theile und der ganzen Linie.

Geometrische Auflösung.

Man verlängere die gegebene gerade Linie AB über den Punkt hinaus, von welchem an

der größere Theil abgeschnitten werden soll, in der Figur über B nach C, und errichte auf ihr in eben dem Punkte, B, die senkrechte Linie BD. Dann nehme man auf BC das Stück BE = $\frac{1}{2}$ AB, und auf BD das Stück BF = AB. Endlich beschreibe man aus E mit der Entfernung dieses Punktes von dem Punkte F, auf der Seite, wo BD liegt, über AC einen halben Kreis, welcher die Linie AB in G, und ihre Verlängerung BC in H treffen wird. Hierdurch wird die gegebene gerade Linie AB in G nach dem äußern und mittlern Verhältnisse, oder so getheilt, daß

$$AG : GB = GB : AB.$$

Beweis.

Es ist, nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke,

$$BF : BG = BH : BF$$

und daher, nach einem nicht weniger bekannten Satze aus der Lehre von der Veränderung gegebener Proportionen,

$$BF - BG : BG = BH - BF : BF.$$

Da nun BF = BA, und BH = BE + EH = BE + EG = 2 BE + BG = AB + BG ist: so hat man

$$BF - BG = AG; \text{ und } BH - BF = BG$$

und folglich

$$AG : BG = BG : AB.$$

Arithmetische oder algebraische Auflösung.

Es sey die gegebene gerade Linie a, und der größere von den gesuchten Theilen x; also der kleinere a — x. Nach den Bedingungen der Aufgabe soll seyn

$$a - x : x = x : a$$

und hieraus fließt, nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Proportionen,

$$x^2 = a^2 - ax$$

so wie aus dieser Gleichung, welche zu den vermischten quadratischen Gleichungen gehört, durch die Auflösung derselben,

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} - \tfrac{1}{2} a.$$

Geometrische Construction.

Man mache, Fig. 17, AB = a, und errichte darüber in B senkrecht BC = $\frac{1}{2}$ a; ziehe AC, schneide von C aus auf CA das Stück CD = BC = $\frac{1}{2}$ a, und von A aus auf AB das Stück AE = AD ab: so ist

$$AE = \sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} - \tfrac{1}{2} a.$$

Beweis.

Da ABC $=$ R, so ist nach dem Pythagorischen Lehrsatze:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

das heißt.

$$AC^2 = a^2 + \tfrac{1}{4} a^2 = \tfrac{5}{4} a^2$$

und also

$$AC = \sqrt{\tfrac{5}{4} a^2}$$

und folglich auch

$$AE = AD = AC - CD = AC - BC$$
$$= \sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} - \tfrac{1}{2} a.$$

Anmerkungen.

In Euclides Elementen findet man diese Aufgabe rein geometrisch auf eine zwiefache Art aufgelöset; im eilften Satze des zweiten Buchs ohne, und im dreyßigsten Satze des sechsten Buchs mittelst der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren. Am ersten Orte lautet sie: Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß das Rechteck zwischen dem einen Theile und der ganzen Linie dem Quadrate des andern Theils gleich sey; an dem andern eben so, als sie vorhin ausgedruckt worden ist, doch ohne das da-

selbst hinzugefügte oder *). Die Euclideischen Auflösungen kann ich hier nicht ausführlich mittheilen, weil sich dieselben auf verschiedene nicht allgemein bekannte Sätze gründen; ein Paar Anmerkungen aber will ich hersetzen.

Wenn man mit Weglassung dessen, was zum Beweise nöthig war, bloß auf dasjenige sieht, was zur Auflösung selbst gehört: so ist Euclides erste Art eben so kurz als die hier mitgetheilte geometrische, welche der darauf folgenden auf Algebra sich gründenden Auflösung nicht füglich nachgesetzt werden darf; sie hat aber den Vorzug, daß man aus ihr sehr leicht beide vorhin erklärte Methoden ableiten kann. Was die zweite Euclideische Auflösung betrifft, so ist das außer Zweifel, daß sie Praktikern unbrauchbar sey, aber desto größer ist ihre, vielleicht unerkannte, Wichtigkeit für den Theoretiker. Richtet man sein Augenmerk auf die Beweise, so trage ich ebenfalls kein Bedenken, Euclides

*) Herr Lorenz hat in seiner neuen Uebersetzung: Eine gegebene gerade Linie nach stetiger Proportion zu schneiden; im Originale steht: Την δοθεισαν ἐυθειαν πεπεϱασμενην ἀκϱον και μεσον λογον τεμειν.

Verfahren im zweyten Buche, vorausgesetzt, daß zugleich auf Leichtigkeit und volle Gewißheit gesehen werden solle, einen beträchtlichen Vorzug beyzulegen, muß aber die Gründe für diese Aeußerung einem andern Orte vorbehalten.

Das ist ferner eine bemerkungswerthe Eigenschaft der mitgetheilten algebraischen Auflösung, daß zum Beweise der Richtigkeit derselben keine Hülfslinien nöthig sind. Will man den Satz, der bey der gegebenen geometrischen Auflösung aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke vorausgesetzt worden ist, bey der Führung des Beweises erläutern oder wiederholen; so muß man wenigstens, Fig. 16, die Hülfslinien FG und FH ziehen. Es giebt daher auch einen Gesichtspunkt, aus welchem betrachtet die algebraische Auflösung allen übrigen vorgezogen werden muß.

Zweyte Aufgabe.

In einem gegebenen Kreise ein reguläres Zehneck oder ein reguläres Fünfeck zu beschreiben.

Geometrische Auflösung.

Man theile den Halbmesser KA des gegebenen Kreises P, Fig. 18, in B nach dem äußern und mittlern Verhältnisse: so ist das größere Stück KB die Seite des in dem Kreise P möglichen regulären Zehnecks.

Beweis.

Man lege von A aus AC = KB in den Kreis, und ziehe KC und BC. Da auf diese Art

KCA = KAC oder BAC

wird, und nach der gegebenen Auflösung

BA : KB = KB : KA

oder

BA : AC = AC : KC

ist: so sind die Dreyecke KAC und BAC einander ähnlich, und folglich

CBA = BAC, und BCA = AKC.

Also wegen des ersten

BC = AC = KB; und hierdurch

BKC oder AKC = BCK = BCA;

folglich

KAC = ACK = 2 CKA.

Es ist aber eine bloß dem regulären Zehnecke

wesentliche Eigenschaft, daß der halbe Polygonwinkel noch einmal so groß ist, als der Centriwinkel.

Geometrisch algebraische Auflösung.

Es sey AB = x, Fig. 19, die Seite des verlangten Zehnecks, und AK = BK = r gezogen. Man verlängere AB, bis BD = KB = KA ist, und ziehe KD. Alsdann ist

$$BKD = BDK = AKB$$

und also die Dreyecke ABK und AKD, weil sie außerdem den Winkel A gemein haben, einander ähnlich. Folglich

$$AK : AB = AD : AK \text{ d. h.}$$

$$r : x = r + x : r.$$

Hierauf beruht die folgende erste geometrische Construction. Es fließt aber auch daraus

$x^2 + rx = r^2$, und diese Gleichung giebt

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}r^2} - \tfrac{1}{2}r.$$

Erste geometrische Construction.

Man nehme auf der unbegrenzten geraden Linie MN, Fig. 20., von K aus KA = KB = r, und, auf der auf BA in K senkrechten Linie, KD = $\frac{1}{2}$ r, und beschreibe aus D mit der Entfernung

dieses Punktes von A oder von B einen Kreis: so schneidet derselbe die gehörig verlängerte CK in E so, daß KE = x wird.

Beweis.

Nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Proportional-Linien beym Kreise ist

$$KA : KE = KC : KB$$

das ist

$$r : x = r + x : r.$$

Zweyte geometrische Construction.

Entweder so, wie bey der vorhergehenden Aufgabe nach Fig. 17, wenn man AB = r seyn, und auch hier AE = x werden läßt; oder auf folgende Art. Man ziehe, Fig. 21, CG = r auf CF = $\frac{1}{2}$ r senkrecht, und beschreibe aus F mit FG = $\sqrt{\frac{5}{4} r^2}$ den Bogen GH, welcher die verlängerte FC begrenze: so ist

$$CH = FH - FC = FG - FC = \sqrt{\frac{5}{4} r^2} - \frac{1}{2} r.$$

Hat man auf eine von den beschriebenen Arten die Seite des Zehnecks gefunden: so ist es von selbst klar, wie man durch Zeichnung die Seite des Fünfecks finde; und durch Zeichnung

der Aufgabe ein Genüge thun zu lehren, ist jetzt die Absicht.

Anmerkungen.

Wenn die Auflösung, welche Euclides von der ersten Aufgabe im zweyten Buche seiner Elemente gegeben hat, und daneben die Sätze von der Vergleichung der Rechtecke, womit er sein drittes Buch beschließt, vorausgesetzt werden können: so läßt sich der erste Beweis auf folgende Art abändern.

Da, Fig. 18, $BA \cdot KA = KB^2 = AC^2$ ist, so wird, wenn man durch C, B und K einen Kreis legt, AC eine Tangente dieses Kreises, und BC eine Sehne desselben. Demnach ist

$BCA = CKB$; folglich, da

$CBA = CKB + BCK$ ist, auch

$CBA = BCA + BCK = KCA = KAC$

folglich

$BC = AC = KB$, und daher

$CKB = BCK = BCA$, und

$KCA = KAC = 2\,CKB$.

Wenn es lediglich darum zu thun ist, die Seite des Zehnecks oder des Fünfecks zu finden:

so verfährt man am leichtesten und bequemsten auf folgende Art. Man zieht aus dem Mittelpunkte K, Fig. 22, auf einen Durchmesser AB einen senkrechten Halbmesser KC, theilt KA in D in zwey gleiche Theile, und schneidet aus D mit der Entfernung DC auf AB das Stück DE ab. Ist dieses geschehen, so ist KE die Seite des Zehnecks, und die gerade Linie zwischen C und E die Seite des Fünfecks. Von der Linie KE ist das Gesagte aus dem Vorhergehenden klar; von der Linie CE wird es durch folgende, mir zum Behufe dieser Beyträge mitgetheilte, Aufgabe werden, von der ich nur noch erinnere, daß ich die vorstehende geometrisch algebraische Auflösung größtentheils aus Hrn. Hofr. Kästners Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen genommen habe.

Dritte Aufgabe

vom Herrn Obrist-Lieutenant von Tempelhof.

Aus dem Halbmesser eines Kreises und der Seite des in demselben beschriebenen Zehnecks die Seite des Fünfecks zu finden.

Auflösung.

Wenn D C, Fig. 23, die Seite eines regulären Zehnecks, und $AC = AF$ der Halbmesser des Kreises ist, in welchem dasselbe beschrieben werden kann: so ist die Seite des in eben diesem Kreise beschriebenen regulären Fünfecks =

$$FB = \sqrt{(AF^2 + AB^2)}$$

wobey vorausgesetzt wird, daß $AB = DC$ sey.

Beweis.

Wenn DC die Seite des Zehnecks ist: so ist der Winkel am Mittelpunkte oder der Winkel $DAC = \frac{2}{5} R$, und der halbe Polygonwinkel oder $ADC = ACD = \frac{4}{5} R$. Theilt man daher den Winkel ADC durch die gerade Linie DB in zwey gleiche Theile: so wird

$$BDC = \frac{2}{5} R = DAC = ADB, \text{ und}$$
$$DBC = \frac{4}{5} R = ADC = ACB$$

folglich sind die Dreyecke BDC und ABD gleichschenklig, und

$$BD = DC; \; AB = BD = DC, \text{ und}$$
$$\triangle BDC \backsim \triangle ADC.$$

Hieraus fließt $DB : BC = AC : CD$, oder

1. $AB : BC = AC : AB$, und daraus

2. $AB^2 = BC \cdot AC$, so wie auch

3. $AB : AC = AC : AC + AB$.

Nun ziehe man DL auf BC senkrecht: so theilt sie den Winkel $BDC = DAC$, so wie auch die Linie BC in zwey gleiche Theile. Ferner ist wegen der Natur des Kreises

$$CL : DL = DL : LE$$

oder

$$\tfrac{1}{2} BC : DL = DL : AC + AB + \tfrac{1}{2} BC$$

also

4. $BC : 2DL = 2DL : 2AC + 2AB + BE$.

Weil auch, nach Nr. 1, $AB : BC = AC : AB$ ist: so hat man

$$AB + BC : AC + AB = AB : AC$$

und also

5. $AC + 2AB + BC : AC + AB$
$= AB + AC : AC$,

und, weil nach Nr. 3

$AC : AB = AB + AC : AC$ ist,

6. $AC + 2AB + BC : AC + AB = AC : AB$

folglich

7. $2AC + 2AB + BC : AC + AB + AB$
$= AC : AB$

und, weil nach Nr. 1 $AC : AB = AB : BC$ ist,

8. 2AC

8. $2AC + 2AB + BC : AC + AB + AB$
$= AB : BC.$

Nun folgt aus Nr. 4.

$2AC + 2AB + BC : 2DL = 2DL : BC$

und also ist

9. $AC + AB + AB : 2DL = 2DL : AB$

folglich

10. $4DL^2 = (AC + AB + AB)\, AB.$

Verbindet man nunmehr mit der versetzten dritten Proportion

$AC + AB : AC = AC : AB$

$AC : AB = AC : AB,$

so bekommt man

11. $AC + AB : AB = AC^2 : AB^2$

und hieraus

12. $AC + AB + AB : AB$
$= AC^2 + AB^2 : AB^2.$

Da sich nun Rechtecke, die gleiche Höhe haben, wie ihre Grundlinien verhalten, so ist

13. $(AC + AB + AB)\, AB : AB^2$
$+ AC^2 + AB^2 : AB^2$

und daher

14. $(AC + AB + AB)\, AB = AC^2 + AB^2$

Nun war Nr. 10.

$(AC + AB + AB)\, AB = 4DL^2$

also ist

$$15.\ 4DL^2 = AC^2 + AB^2$$

und folglich die gesuchte Seite des Fünfecks

$$16.\ 2DL = \sqrt{(AC^2 + AB^2)}$$
$$= \sqrt{(AF^2 + AB^2)} = FB.$$

Vierte Aufgabe.

Aus der gegebenen Lage dreyer Gegenstände die Lage eines Standpunktes zu finden, woselbst die Winkel gemessen worden, welche die drey geraden Linien einschließen, so von diesem Standpunkte nach jenen drey Gegenständen gezogen werden können.

Auflösung.

Die Gegenstände, deren Lage gegeben worden, sollen durch die Punkte A, B und D, Fig. 24, vorgestellt werden, so daß AB, BD, und der Winkel ABD, wodurch ihre Lage bestimmt wird, als bekannt anzusehen sind. Ferner soll E den gedachten Standpunkt andeuten, wodurch also auch die Winkel AEB und BED bekannt werden. Dieses vorausgesetzt, und dabey angenommen, daß AB, BD, ABD, AEB und BED durch wirkliche Messung gefunden, und dem

Gefundenen gemäß ABD verzeichnet sey: so erhält man den Punkt E auf dem Papiere in der gehörigen, das heißt, der wirklichen entsprechenden Lage, durch folgende Operationen.

1. Theilt man AB in F, und BD in G in zwei gleiche Theile, und zieht durch die Theilungspunkte auf AB und BD senkrechte Linien.
2. Legt man auf AB an A den Winkel IAB = AEB, und auf BD in D den Winkel LDB = BED.
3. Errichtet man auf AI in A die AC, und auf BD in D die KD senkrecht, und verlängert diese Linien, bis sie sich mit den durch die Theilungspunkte F und G gelegten senkrechten Linien in C und K schneiden.
4. Zieht man CK, und darauf aus B die gerade Linie BM senkrecht.
5. Endlich verlängert man BM über M nach E, bis ME = BM ist: so ist E der gesuchte Punkt.

Beweis.

Denn da BM auf CK senkrecht, und ME = BM ist: so ist

$\triangle BMC = \triangle CME$; und $\triangle BMK = \triangle KME$

folglich

BC = CE; und BK = KE.

Beschreibt man daher aus C mit CB = CA = CE, und aus K mit KB = KD = KE Kreise, so geht der erste durch A, B und E, und der andere durch B, D und E, und jenen berührt AI in A, und diesen LD in D. Zieht man demnach EA, EB und ED: so wird

IAB = AEB; und LDB = BED,

und es hat also der gefundene Punkt E die verlangte Eigenschaft.

Anmerkungen.

Es kann sich ereignen, daß die Punkte C und K in M zusammenfallen, und dieses wird allemal geschehen, wenn die Punkte A, B, D und E in dem Umfange eines und desselben Kreises liegen. Wenn dieser Fall eintritt, so reichen die Data nicht hin, den Punkt E genau zu verzeichnen, sondern sie führen, anstatt auf einen Punkt, zu einem Kreisbogen. Es stelle Fig. 25 einen solchen Fall vor, so kann man E in dem Bogen APD annehmen, wo man will, ohne sich von den Datis zu entfernen. Um also

diese Unbestimmtheit aus dem Wege zu räumen, messe man in dem gedachten Falle auch BAE oder BDE, und lege, nachdem man eine Figur, wie die 25ste, entworfen hat, entweder auf AB an A den Winkel BAE, oder auf BD an D den Winkel BDE; wo man denn in dem Durchschnittspunkte des andern Schenkels AE oder DE und des Bogens APD den gesuchten Punkt bekommt.

Man löset diese Aufgabe öfters auf die Art auf, daß man den Punkt E als den zweyten Durchschnittspunkt der beiden aus C und K, Fig. 24, beschriebenen Kreise angiebt. So findet man sie unter andern in des Hrn. Geh. Ober-Baurath Schulze kurzen Anweisung zur ebenen Dreyeck-Meßkunst, besonders für diejenigen, welche diese Wissenschaft nur auf die Feldmeßkunst, Kriegs- und bürgerliche Baukunst anwenden wollen, §. 77, S. 123. 124. Allein je näher die Punkte C und K einander liegen, desto mehr krümmen sich die Kreise an einander hin, und desto weniger ist man dann im Stande, den Punkt E genau zu nehmen. Deswegen glaube ich Ursache zu haben, vorstehende Auflösung vorzuziehen.

Wenn Hr. Schulze S. 128 sagt: Die Aufgabe wird unmöglich,

1. Wenn die vier Punkte A, B, D, E in einer geraden Linie liegen.
2. Wenn die Winkel ABD + AED = 2 R oder 180° sind:

so ist dieses dem Sprachgebrauche der Mathematiker nicht gemäß; die Aufgabe ist dann nicht unmöglich, sondern nur unbestimmt. Dieser Unterschied ist wichtig. Denn was man für unmöglich hält, läßt man fahren; was aber bloß unbestimmt ist, davon weiß man, oder kann durch Nachdenken finden, wie man es von der Unbestimmtheit befreye.

Die trigometrische Auflösung dieser Aufgabe gehört nicht zu meiner jetzigen Absicht.

Fünfte Aufgabe.

Ein Trapezium ABCD, Fig. 26, dessen Seiten AD und BC einander parallel sind, ist durch die Diagonale AC in die beyden Dreyecke ABC und ACD getheilt worden. Man soll dasselbe durch eine mit AD und BC parallele Linie HI so theilen, daß

HBCI = △ABC; und AHID = △ACD werde.

Synthetische Auflösung.

Man ziehe BE der CD parallel, und errichte in E über AD, als der größern von den beyden Parallelen AD und BC, eine senkrechte Linie. Dann beschreibe man über AD einen halben Kreis, welcher die gedachte senkrechte Linie in F schneide, und ziehe DF. Endlich nehme man auf AD, von D aus, DG = DF, und lege durch G die Linie GH mit EB oder DC parallel: so ist H der Punkt, wodurch HI gezogen werden muß, um das Trapezium ABCD auf die verlangte Art zu theilen.

Beweis.

Es sey, der Kürze wegen, die größere der beyden Parallelen AD und BC, also

AD = a, und BC = b: so ist

DE = MI = BC = b, und AE = a—b.

Nun ist, nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke,

ED : DF = DF : AD, d. h.

b : DF = DF : a, und also

$$DF = \sqrt{ab}; \text{ folglich}$$

$$HM = HI - MI = DF - BC = \sqrt{ab} - b.$$

Man setze, nachdem man BK auf HI und AD senkrecht gezogen,

$$BK = c; \text{ so ist}$$

$$AE : HM = KB : LB, \text{ das heißt}$$

$$a - b : \sqrt{ab} - b = c : LB, \text{ und also auch}$$

$$LB = \frac{c(\sqrt{ab} - b)}{a - b}.$$

Dieses vorausgesetzt, ist das Trapezium

$$HBCI = \triangle HMB + MBCI$$

$$= (\tfrac{1}{2}\sqrt{ab} - \tfrac{1}{2} b + b) \frac{(\sqrt{ab} - b) c}{a - b}$$

$$= \frac{c(\sqrt{ab} + b)(\sqrt{ab} - b)}{2(a - b)} = \frac{c(ab - bb)}{2(a - b)}$$

$$= \tfrac{1}{2} bc;$$

und da auch das Dreyeck ABC, weil BK $= c$ seine Höhe ist, wenn man BC $= b$ zur Grundlinie annimmt, $= \frac{1}{2}bc$ ist: so fällt in die Augen, daß die Linie HI das Trapezium ABCD so theile, daß das Trapezium HBCI dem Dreyecke ABC gleich wird. Hierdurch wird aber auch AHID $= \triangle$ ACD.

Analytische Auflösung.

Es sey, Fig. 26, HI die verlangte Linie, und dabey, wie vorhin,

$$AD = a, \text{ und } BC = b, \text{ aber } HI = x.$$

Zieht man HG und BE einander und zugleich der DC parallel, so wird dadurch

$$DE = MI = BC = b;$$

$$AE = a - b; \; HM = x - b.$$

Man ziehe ferner auch hier BK, so wie vorhin, auf HM und AD senkrecht, und setze

$BK = c$: so wird, da

$$AE : HM = KB : BL \text{ ist,}$$

$$a - b : x - b = c : BL, \text{ und also}$$

$$BL = \frac{c\,(x - b)}{a - b}.$$

Nun ist das Trapezium

$$HBCI = \triangle HMB + MBCI$$

$$= (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}b + b)\,\frac{c\,(x - b)}{a - b}$$

$$= \frac{(x + b)\,c\,(x - b}{2\,(a - b)} = \frac{c\,(x^2 - b^2)}{2\,(a - b)}$$

und soll dabey dem Dreyecke ABC oder $\frac{1}{2}bc$ gleich seyn. Folglich hat mau

$$\frac{c\,(x^2 - b^2)}{2\,(a - b)} = \frac{bc}{2}, \text{ oder, abgekürzt,}$$

$\frac{x^2 - b^2}{(a-b)} = b.$ Diese Gleichung giebt

$x^2 - b^2 = ab - b^2$, und hieraus folgt

$x^2 = ab$, und endlich

$x = \sqrt{ab}$.

Geometrische Construction.

Diese ist ganz, selbst mit dem Beweise, mit der vorhergehenden Auflösung einerley.

Anmerkungen.

Ob man den halben Kreis, der über AD beschrieben werden muß, so wie Fig. 26, oder so wie Fig. 27 beschreibe? ist natürlicher Weise eine sehr gleichgültige Sache.

Man findet diese Aufgabe unter andern in Böhms gründlicher Anweisung zur Meßkunst auf dem Felde. Da dieses Buch zum Nutzen derer, denen an der Ausübung dieser Wissenschaft gelegen ist, geschrieben worden: so kann es wohl nicht schaden, des Verfassers Auflösung zur beliebigen Vergleichung hier mitzutheilen. In der zweyten 1779 erschienenen Auflage trifft man sie §. 106, S. 181 und 182 an; da aber dabey die erste Nummer des vorhergehenden §

vorausgesetzt wird: so sehe ich mich genöthigt, auch diese herzusetzen.

(§. 105.)

Ein Trapezium, darin keine Seite mit der andern parallel ist, dergestalt in zwey gleiche Theile zu theilen, daß die Scheidungslinie mit einer gegebenen Seite parallel sey.

Rechnet den Inhalt des Trapezii ABCD, Fig. 28, aus, und halbiret ihn. Nun sey a) darin CE > AB. Wenn die Theilung mit AB parallel geschehen soll, so ziehet durch den nächsten Winkel C bey AB die Linie CE parallel mit AB; bemerket, ob der Triangel CED genau der Hälfte der Figur gleich, oder größer, oder kleiner sey. Ist das erste, so ist bereits geschehen, was verlangt worden. Ist das zweyte, so schneidet von ihm, nach der oben ertheilten Anleitung, parallel mit CE oder AB so viel ab, als er zu viel hat. Wir haben also nur den dritten Fall allhier zu betrachten. Lasset also auf CE aus A den Perpendikel AH fallen. Ziehet auch noch AM mit BD parallel; messet AB, CE und AH nach dem gegebenen Maaßstabe. Multipliziret nun den Inhalt der Hälfte

der Figur mit dem Unterschiede zwischen AB und CE zweymal genommen. Dividirt das Produkt mit AH; zu dem Quotienten addirt das Quadrat von AB; aus der Summe extrahirt die Quadratwurzel; diese nehmet nach dem Maaßstabe ab, und traget sie von E nach I; durch I ziehet die Linie IF parallel mit BD, und durch F ziehet endlich FG mit AB parallel: so ist ABGF der eine, und FGDC der andere verlangte Theil.

Beweis.

Es sey AB = a, CE = b, AH = c, der Inhalt des halben Trapezii = d, FG = EI (§. 20. Geom. W.) = x: so ist der Unterschied zwischen AB und CE, d. i. CM = b — a; FL = FG — AB = x — a. Nun ist

CM : AH = FL : AK (§. 149. Geom. W.)

$$b - a : c = x - a : \frac{c(x-a)}{b-a}$$

Also ist

$$\triangle FAL = \frac{c(x-a)(x-a)}{2(b-a)} = \frac{c(x-a)^2}{2(b-a)}, \text{ und}$$

$$ABGL = AB \cdot AK = \frac{ac(x-a)}{b-a}.$$

Demnach ist ferner

$$ABGF = FAL + ABGL$$

$$= \frac{c(x-a)^2}{2(b-a)} + \frac{ac(x-a)}{b-a} = d.$$

Also

$$d = \frac{c(x^2 - 2ax + a^2)}{2(b-a)} + \frac{acx - a^2c}{b-a}$$

$$d = \frac{cx^2 - 2acx + a^2c + 2acx - 2a^2c}{2(b-a)}$$

$$d = \frac{cx^2 - a^2c}{2(b-a)} = \frac{c(x^2 - a^2)}{2(b-a)}$$

$$2(b-a)d = c(x^2 - a^2)$$

$$\frac{2(b-a)d}{c} = x^2 - a^2$$

$$\frac{2(b-a)d}{c} + a^2 = x^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{2(b-a)d}{c} + a^2\right)} = x.$$

Es sey b) alles, wie vorhin, nur CE < AB. Verfahret in diesem Falle völlig, wie in dem vorigen; nemlich rechnet den Inhalt des Trapezii ABCD aus, und halbiret ihn. Ziehet MC mit AB parallel, lasset auf MC von A den Perpendikel AH fallen, ziehet auch AM mit BD parallel, wie vorher; messet AB, CE und AH nach dem gegebenen Maaßstabe. Multipliziret nun den Inhalt der Hälfte der Figur mit

dem Unterschiede zwischen AB und CE zweymal genommen, d. i. mit dem doppelten Unterschiede; dividirt das Produkt mit AH; subtrahirt den Quotienten von dem Quadrate von AB; aus der Differenz extrahirt die Quadratwurzel; diese nehmet nach dem Maaßstabe ab, und traget sie von E bis I; durch I ziehet die Linie IF parallel mit BD, und durch F ziehet endlich FG mit AB parallel: so ist ABGF der eine, und FGDC der andere verlangte Theil.

Beweis.

Es sey wiederum AB = a, CE = b, AH = c, der Inhalt des halben Trapezii = d, FG = EI (§. 20. Geom. W.) = x; so ist der Unterschied zwischen AB und CE, d. i. CM = a — b, FL = a — x = AB — FG. Nun ist

$$CM : AH = FL : AK \text{ (§. 149. Geom. W.)}$$

$$a - b : c = a - x : \frac{c\,(a - x)}{a - b}.$$

Also ist

$$\triangle FAL = \frac{c\,(a - x)^2}{2\,(a - b)}, \text{ und}$$

$$ABGL = AB \cdot AK = \frac{ac\,(a - x)}{a - b}.$$

Demnach ist ferner

$$ABGF = ABGL - FAL$$

$$= \frac{ac(a-x)}{a-b} - \frac{c(a-x)^2}{2(a-b)} = d.$$

Also

$$d = \frac{a^2c - acx}{a-b} - \frac{a^2c - 2acx + cx^2}{2(a-b)}$$

$$d = \frac{2a^2c - 2acx - a^2c + 2acx - cx^2}{2(a-b)}$$

$$d = \frac{a^2c - cx^2}{2(a-b)} = \frac{c(a^2 - x^2)}{2(a-b)}$$

$$2(a-b)d = c(a^2 - x^2)$$

$$\frac{2(a-b)d}{c} = a^2 - x^2$$

$$x^2 = a^2 - \frac{2(a-b)d}{c}$$

$$x = \sqrt{\left(a^2 - \frac{2(a-b)d}{c}\right)}.$$

(§. 106.)

Einen jeden Triangel in ein Trapezium zu verwandeln, das eben dieselbe Basin und eben denselben daran liegenden Winkel habe, darin die gegenüberstehende Seite mit der Basi parallel sey, und die andere Seite mit der Basi einen gegebenen Winkel mache.

Der Triangel ABC, Fig. 29, soll in das Trapezium BEFC verwandelt werden, daß BC und der Winkel ABC bleibe, BCD wird gegeben, und EF soll der BC parallel werden. Wenn ihr die 29ste Figur mit der 28sten vergleicht, so sehet ihr, daß ihr nur den Triangel EKB und den Rhomboidem KFCB auszurechnen und zusammen zu addiren habt, um den Inhalt von dem Trapezio BEFC zu finden. Wenn ihr demnach BC = a, AD, welche parallel ist mit BC, = b, BG, so voriger perpendikulär stehet, = c, △ACB = d, und EF = x setzet, so findet ihr, wie oben (§. 105. Nr. 1.)

$$EKB = \frac{c\,(x-a)^2}{2\,(a-b)}, \text{ und } KFCB = \frac{ac\,(x-a)}{b-a}.$$

Demnach

$$EFCB = d = \frac{c\,(x^2 - 2ax + a^2)}{2\,(b-a)} + \frac{ac\,(x-a)}{b-a}$$

und folglich wiederum

$$x = \sqrt{\left(\frac{2\,(b-a)\,d}{c} + a^2\right)}.$$

Wenn ihr nun ferner GC ziehet, so ist BGC = BAC = d, und wenn ihr hierauf BC in M halbiret, und ML mit BG parallel ziehet, so ist GLMB = PGC = d, und demnach, da

BG

$BG = c$, $BM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a = \frac{d}{c}$ ist,

$$\sqrt{\left(\frac{2(b-a)d}{c} + a^2\right)} = \sqrt{(a(b-a) + a^2)}$$
$$= \sqrt{(ab - a^2 + a^2)} = \sqrt{ab}.$$

Also brauchet ihr nur die mittlere Proportional-Linie zwischen BC und AD, die ihr folglich, wenn ihr rechnen wollet, messen müsset, auszurechnen, auf dem Maaßstabe aufzunehmen, und von D nach N zu tragen, so könnet ihr NE mit DC, und aus dem Punkte E die Linie EF mit BC parallel ziehen, um das verlangte Trapezium zu erhalten.

Wenn ihr aber nicht rechnen wollet, rc. Mich dünkt, es müsse wohl jedem, der auf solche Art rechnen soll, die Lust dazu verschwinden. Doch es wird sich an einem andern Orte Gelegenheit finden, mehr über diese Auflösung und andere ihnen ähnliche zu sagen.

Einige Anwendungen dieser Aufgabe.

Eine der ersten Anwendungen, welche man von dieser Aufgabe machen kann, findet bey folgender Aufgabe statt.

Ein gegebenes Dreyeck parallel mit einer seiner Seiten in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Gesetzt, es sollte das Dreyeck ABC, Fig. 30, parallel mit BC in drey gleiche Theile getheilt werden: so dürfte man nur auf AC, von C aus, CD = $\frac{1}{3}$ AC nehmen, DB und DE, letztere mit BC parallel, ziehen, um sogleich zu erkennen, wie man, von BC an, das erste Drittel finden werde. Hätte man aber BGFC = $\frac{1}{3}$ ABC, Fig. 31, gefunden, so fiele, wenn man nun AF in H in zwey gleiche Theile theilte, und HG und HI, letztere mit GF parallel, zöge, eben so leicht alles übrige in die Augen.

Eine andere Anwendung, worüber indeß, wenn die vorige gut gefaßt ist, nicht viel gesagt zu werden braucht, wird bey dem Falle möglich, wenn ein gegebenes Dreyeck, mit einer seiner Seiten parallel, in eine beliebige Anzahl von Theilen getheilt werden soll, die unter sich ein gegebenes Verhältniß haben. Gesetzt, es sollte das Dreyeck ABC, Fig. 32, in drey Theile getheilt werden, so daß die Theilungslinien mit AB parallel wären, und der an AB liegende sich zum nächsten, wie 3 zu 4, und dieser zu

dem übrigen wie 4 zu 2 verhielte: so dürfte man nur eine von den übrigen Seiten, z. B. AC zuerst in D so theilen, daß AD $= \frac{3}{9}$ AC $= \frac{1}{3}$ AC würde, DB ziehen, und das Dreieck ABD nach der gegebenen Anleitung in das Trapezium EFBA verwandeln. Wäre dieses geschehen, so theilte man ferner die Linie EC in G so, daß EG : GC = 4 : 2 = 2 : 1 würde, zöge GF, und verwandelte das dadurch erhaltene Dreyeck GFE in das Trapezium HIFE.

Wären die gegebenen Verhältnißzahlen von der Beschaffenheit, daß die zwischenliegenden Theile, bey der Vergleichung mit den folgenden, durch andere Zahlen ausgedruckt würden, als wenn man sie mit den vorhergehenden zusammenstellte: so führte man diesen Fall durch eine leichte Rechnung auf den erklärten zurück. Sollte z. B. ein Dreyeck auf die erwähnte Art und in dem Verhältnisse getheilt werden, daß sich der erste Theil zum zweyten, wie 5 zu 6, und der andere zum dritten, wie 7 : 3, verhielte: so dürfte man nur die Zahlen des ersten Verhältnisses mit 7, und die des andern mit 6 multipliciren. Hierdurch bekäme man für das Verhältniß des ersten Theils zum zweyten 35 : 42,

und für das Verhältniß des zweyten Theils zum dritten 42 : 18. Also könnte man die Aufgabe nunmehr auch so ausdrücken, daß darnach das gegebene Dreyeck in dem Verhältnisse der Zahlen 35, 42, 18, in drey Theile getheilt werden sollte. Folglich müßte sich der erste Theil zum Ganzen wie 35 : 95 = 7 : 19, und der andere zur Summe des zweiten und dritten Theils, wie 42 : 60 = 7 : 10, verhalten.

Sollen mehr, als drey Theile, gemacht werden, so hat man eben dieselben Operationen, nur öfter, zu verrichten, und alles, was dabey zu bemerken vorkommt, besteht in einigen Verkürzungen, die jeder, wenn er mit Aufmerksamkeit und Ueberlegung handelt, selbst finden kann.

Die übrigen eben so zahlreichen als wichtigen Anwendungen dieser Aufgaben, muß ich, aus Mangel am Platze, einem der folgenden Stücke vorbehalten.

II.

Ueber den Begriff der Mathematik und ihre Theile,

nebst Gedanken,

das Verhältniß der Mathematik zur Philosophie betreffend.

Wir haben an Hrn. Kants Definition der Mathematik eine so vortrefliche Erklärung der gründlichsten unter allen Wissenschaften, daß ich von Niemanden Tadel befürchten dürfte, wenn ich dieselbe auch hier zum Grunde legte. Allein, einmal habe ich bereits, in den Anmerkungen und Zusätzen und in der Vorrede zu meiner Uebersetzung des classischen Werkes der Eulerischen Differenzial-Rechnung, die Theile der Mathematik aus dieser ergiebigen Quelle hergeleitet; und dann erhalte ich vielleicht auf

dem Wege, welchen ich jetzt wählen will, Gelegenheit zu einigen nicht unwichtigen Bemerkungen, welche sich mir sonst nicht darbieten würden.

Uebersetzt man das Wort Mathematik, mit Rücksicht auf die Regeln, nach welchen die Bedeutungen wissenschaftlicher Ausdrücke bestimmt zu werden pflegen: so bezeichnet dasselbe, nicht eine sondern, die Wissenschaft, das heißt, den Inbegriff alles dessen, was wir wissen können, ohne dazu der Beyhülfe der Erfahrung zu bedürfen. Allein auf diese Art wären Mathematik und reine Vernunftwissenschaft, nach Hrn. Kants Sinne, nicht von einander unterschieden; und so entsteht die doppelte Frage:

1. Welchen Theil des Inbegriffs alles dessen, was wir ohne Beyhülfe der Erfahrung wissen können, begreift man wirklich unter dem Worte Mathematik? und warum hat man ihn abgesondert?
2. In was für einem Verhältnisse steht dieser Theil zu dem übrigen?

Beyde Fragen sind nicht neu, und eben so wenig, überhaupt genommen, dasjenige, was ich zur Beantwortung derselben sagen werde.

Aber das Nützliche kann dem beobachtenden Auge nicht zu oft vorgelegt werden: in eben dem Standpunkte erblickt dasselbe öfters die folgenden Male mehr, und in einem andern zeigt bisweilen ein schon oft betrachteter Gegenstand noch nicht bemerkte Seiten.

Zuvor, um nichts zurück zu lassen, diese Frage: Was können wir, ohne Beyhülfe der Erfahrung, wissen?

Ausführlich läßt sich diese Frage nicht anders, als durch und in einem zu dieser Absicht eingerichteten vollständigen Lehrbuche der Mathematik beantworten, wovon ich, in dem nächsten Stücke dieser Beyträge, eine mit Erläuterungen begleitete Probe, zur Prüfung, vorlegen werde. Hier muß ich mich damit begnügen, folgendes herzusetzen.

Verschließen wir uns die Wege, auf welchen Erfahrungen möglich sind, mit andern Worten, entsagen wir dem Gebrauche der Sinne: so bleibt für uns außer dem, was in uns denkt, nichts weiter übrig, als was wir mit dem Namen, Raum, zu bezeichnen pflegen. Unserer Wahrnehmungskraft, ist derselbe Anschauung, und etwas unbegrenztes; unsere

Denkkraft erhält an ihm keinen Stoff, sich thätig zu beweisen; er ist das Feld, nicht der Gegenstand der Mathematik. Aber bloße Anschauungen befriedigen das Bedürfniß unsers Geistes, deutlich und gewiß zu erkennen, nicht, am allerwenigsten bloße Anschauungen des Unbegrenzten; was soll ihm ein Land, ohne nährende Früchte? Hierdurch zur Selbstwirksamkeit gereizt; auf diese Art gezwungen, durch eigenen Fleiß das vor ihm liegende Feld zu bebauen; in einem Zustande, wo er nichts wahrnimmt, als dunkel und verworren eine Menge von Theilen; und dieses selbst dann, wenn er sich auch nur Einen Theil jenes Raums zur Betrachtung wählen wollte: ist das Einzige, was er thun kann, sich zu gedenken, was keine Theile habe, und zwar, wo und so oft er es will. Aber so leicht es auch unserer Seele ist, sich in dem unbegrenzten Raume, ohne alle Beyhülfe der Erfahrung, entweder so viele Punkte, oder einen und denselben so vielmal, als sie irgend will, zu gedenken: so hält gleichwohl für jetzt die Dunkelheit in den dadurch erweckten Vorstellungen mit der Menge der angenommenen Punkte gleichen Schritt; und so wird es

uns nothwendig, nicht anders, als stufenweise, vom Einfachen oder dem Punkte auszugehen. Schon beym nächsten Schritte, bey zwey Punkten, zeigt sich ein doppelter Weg; man kann entweder zwey Punkte, oder einen Punkt zweymal nehmen, und eben dieser doppelte Fall findet bey mehr als zwey Punkten statt. Der erste Weg führt durch das Gebiet der reinen Geometrie, der andere durch das Gebiet der Arithmetik, und ist man durch beyde gewandert, so steht man am Eingange des Gebiets der durch die Arithmetik zu einem höhern Grade der Deutlichkeit erhobenen, oder der vermischten Geometrie. Bey zwey Punkten erblickt man jetzt in der reinen Geometrie, deutlich, bloß die gerade Linie; dunkel, etwas, was man noch nicht zu entwickeln im Stande ist. Bey drey Punkten gelangt man endlich zur unbegrenzten Ebene, und sieht darin ein eingeschränkteres Feld der reinen Geometrie, das Feld der Planimetrie, vor sich. Besäet man gleichsam auch dieses Land mit Punkten, und sucht darauf stufenweise zu erforschen, was zwischen denselben liegt: so stellen sich dem Blicke zuvörderst der Kreis, und nach ihm alle ebene und geradli-

nige Figuren in einer leicht zu übersehenden Ordnung dar; aber man findet bey der genauern Untersuchung derselben bald Schwierigkeiten und Hindernisse, wenn man irgendwo eher weiter geeilt ist, ehe man sich alle vorhergehende Gegenstände, so weit es jedesmal möglich war, von allen Seiten, und vollständig bekannt gemacht hatte. Beobachtet man die Vorsichtigkeits-Regeln, welche hieraus fließen: so lernet man in einer sehr natürlichen Ordnung bey den genannten Gegenständen zuerst die Stücke kennen, wodurch jeder von ihnen bestimmt wird, und sieht sich also im Stande, festzusetzen, unter was für Umständen zwey und mehrere von ihnen, entweder vollkommen oder bloß ihrem Inhalte nach, einander gleich oder ungleich sind. Dabey ist es, des so eben angeführten Umstandes wegen, nothwendig, nach jeder Zusammensetzung (Synthesis), auch die in dem gefundenen Zusammengesetzten befindlichen Stücke, durch die Auflösung (Analysis), zu entwickeln. Kehrt man am Ende dieses Weges wieder dahin zurück, wovon man ausgegangen war, und verfolgt nun den Pfad, der durch das Gebiet der Arithmetik führt: so

zwingt die Schwierigkeit, welche man findet, sich Einen Punkt oftmals eben da deutlich vorzustellen, den öfters zu nehmenden Punkt in mehrern außer einander befindlichen zu gedenken, ohne dabey auf das dazwischen enthaltene zu sehen. Die Absicht, auch hier zu deutlichen, vollständigen und gewissen Kenntnissen zu gelangen, bestimmt die Art, wie jedesmal die Mengen der erwähnten außer einander befindlichen Punkte gedacht, oder auch sinnlich dargestellt werden können und müssen: aber sie nöthigt auch bald, statt dieser natürlichen Darstellungen, ihre Stelle vertretende bequemere Zeichen zu gebrauchen. Dies ist die Entstehungsart der Zifern oder der Zeichen der Zahlen, und unter Zahlen hat man, nach dem Vorhergehenden, nichts anders zu denken, als Mengen von Einfachen oder Einheiten. Auf diese Art die Zahlen, den Gegenstand der Arithmetik, betrachtet, würde man die Untersuchung derselben bald geendet haben, wenn es dabey bloß auf Sätze ankäme, wornach man die Gleichheit oder Ungleichheit jeder zwey unmittelbar gegebenen Zahlen zu bestimmen im Stande wäre. Aber wenn zwey Zahlen gegeben sind, so kann man diesel-

ben auch vereinigen und zusammensetzen, und eben dieses ist man mit einer und derselben Zahl zu thun fähig, wenn man dieselbe zweymal nimmt. So gelangt man zur Addition und Multiplication zweyer gegebenen Zahlen, und zur Erhebung einer gegebenen Zahl zur Quadratzahl; und so wie man dabey synthetisch verfährt, so sind Subtraction, Division, und Ausziehung der Quadratwurzel, die ihnen entgegenstehenden analytischen Operationen. Ob diese letztern in einzelnen Fällen möglich seyn sollen, oder nicht? hängt von der Beschaffenheit der gegebenen Zahlen ab; bey einer allgemeinen Untersuchung wird diese Möglichkeit angenommen, und wenn sie in einzelnen Fällen nicht statt findet, so läßt sich wenigstens durch Zeichen andeuten, was geschehen sollte. Und bis hieher und nicht weiter, darf man jetzt den Weg durch das Gebiet der Arithmetik verfolgen, wenn man denselben nicht weiter, als bis zu der Grenze fortsetzen will, bis zu welcher man vorhin in dem Gebiete der Geometrie gelangt war. Aber daß er sich weiter erstrecke, ist klar; indeß auch das, daß zwischen dem arithmetischen und geometrischen Wege, der durch die vermischte

Geometrie fortlaufende liege, oder an dieselben sich anschließe. Man stelle sich die gegebenen Zahlen in den Punkten, welche durch sie angezeigt werden sollen, vor, und zwar so, wie es die vorhin erwähnte Absicht, deutliche, vollständige und gewisse Kenntnisse zu bekommen, erfordert, und zugleich ausführlich: so wird man, wenn man nun die erste Forderung der Geometrie, so oft es möglich ist, befolgt, den dagewesenen arithmetischen Gegenstand, in einen geometrischen verwandelt, erblicken; wahrnehmen, wie derselbe nunmehr gedacht und beschrieben werden könne; entdecken, daß es auch eine Addition, Subtraction, Multiplication gerader Linien gebe, daß man eine gegebene gerade Linie zum Quadrate zu erheben, und ein gegebenes Rechteck durch eine gerade Linie zu dividiren, oder daraus die Quadratwurzel zu ziehen im Stande sey; so wie auch, was man mit diesen Redensarten eigentlich für einen Sinn zu verbinden, und wie man die dadurch angezeigten Operationen in wirklichen Fällen zu verrichten habe; und endlich wird sich dabey zeigen, wie und wodurch die vorhin öfters unmöglichen analytischen Operationen der Arithmetik, bey der Anwen-

dung auf geometrische Gegenstände, ihre Unmöglichkeit verlieren. Aber hier ist eine Lücke; man findet auf diesem Wege nicht, ob und wie eine gerade Linie durch eine andere gerade Linie dividirt werden könne? Ueberlegt man indeß, daß man durch die Division einer Zahl durch eine andere eigentlich nichts weiter thue, als daß man beyde mit einander vergleiche, und nach einander bestimme: so ist der Uebergang zur Untersuchung der Verhältnisse und der Aehnlichkeit der Figuren gebahnt, und nach derselben auch Erweiterung der Arithmetik und abermalige Anwendung des Gefundenen auf die Geometrie möglich. Ist man bis hieher gekommen, so fehlet, wie nachher gezeigt werden soll, allerdings noch viel, um in der unbegrenzten Ebene alles darin mögliche untersucht zu haben: allein erlaubt ist es gleichwohl schon, aus ihr hinauszugehen, und zu dem Felde, welches der unbegrenzte Raum anfänglich darbot, zurückzukehren. Auf diese Art folgt nun dasjenige, was man gewöhnlich unter dem Namen der Stereometrie begreift, die Lehre von der Lage gerader Linien gegen Ebenen und der Ebenen gegen einander eingeschlossen; und so wie die

ebenen Figuren, so lassen sich auch die geometrischen Körper, sowohl ihrer Gleichheit und Ungleichheit, als ihrem Verhältnisse zu einander und der Aehnlichkeit nach, betrachten. Durch die Stereometrie wird von neuem Erweiterung der Arithmetik und ihrer Anwendung bey geometrischen Gegenständen möglich, und zwar jene in einem weit größern Umfange, als sie jetzt zu der gedachten Anwendung erforderlich ist. Grund genug, zur weitern Anbauung des Feldes der reinen Geometrie zurückzukehren. Eben dieses wird auch, eines andern Umstandes wegen, nothwendig. Sollen nemlich in der Stereometrie die Körperschnitte ausführlich untersucht werden, so gelangt man bey den Kugel- und Kegelschnitten zu den Linien der zweyten Ordnung, zu welchen man auch auf die Art kommen könnte, daß man drey Punkte auf eine ähnliche Art benutzte, als man solches im Anfange der Planimetrie bey zwey Punkten that, indem man dadurch zum Kreise geführt wurde. Bekannt mit der Arithmetik in ihrem ganzen Umfange, so wie auch mit der rechten Art ihres Gebrauchs bey geometrischen Gegenständen und der daher entspringenden großen Erleichte-

rung, ist es natürlich und zweckmäßig, hier die vermischten geometrischen Untersuchungen mit den reinen zu verbinden; und so ist der Weg durch das Feld der krummen Linien und Flächen, und der durch jede Art der Flächen begrenzten Körper gebahnt, wenigstens so weit, als derselbe jetzt betreten werden kann.

Nun einen Rückblick. Alles, was sich auf diese Art in dem unbegrenzten Raume zur Untersuchung darbietet, ist von der Beschaffenheit, daß wir uns dasselbe in sinnlichen, aber dabey gleichwohl seine wesentlichen Eigenschaften darstellenden Zeichen vorstellen können; und die Methode, nach welcher wir es untersucht haben, war bey aller übrigen Verschiedenheit doch immer die, daß wir Zeichen von der beschriebenen Art zum Grunde legten, und darin die Eigenschaften der untersuchten Objecte wahrzunehmen strebten. Nennen wir daher sinnliche Zeichen, welche die wesentlichen Eigenschaften ihrer Objekte vorstellen, und eben dadurch geschickt sind, die Untersuchung dieser Objekte in einem hohen Grade zu erleichtern, ohne daß dabey der Strenge und der Allgemeinheit der gefundenen Behauptungen im geringsten zu nahe getreten werden

den darf, Constructionen: so haben wir uns bis jetzt mit lauter Objecten beschäftigt, welche sich in Constructionen untersuchen ließen, und dieselben auch bloß in Constructionen betrachtet. Offenbar haben wir noch nicht die ganze Mathematik; wir wollen also den Inbegriff alles dessen, was auf den beschriebenen Wegen gefunden werden kann, Elementar-Mathematik nennen. Meistens hatten wir, wenn wir etwas bestimmen wollten, alle Data dazu; oft aber fehlte auch eins und das andere von den zu einer ganz genauen Bestimmung erforderlichen Stücken, und diese Fälle lassen sich durch das ganze, bis jetzt durchwanderte, Gebiet mit unzähligen andern vermehren. Auf diese Art läßt sich die Elementar-Mathematik auch in die bestimmte und unbestimmte eintheilen, und letztere, da die krummen Linien und was damit zusammenhängt, der vorzüglichste Gegenstand derselben sind, auch mit dem Namen der höhern, so wie erstere, im Gegensatz, mit dem Namen der gemeinen Elementar-Mathematik, belegen; und es kann daher folgende Tabelle dienen, die Elementar-Mathematik und ihre Theile mit einem Blicke zu übersehen.

Elementar = Mathematik.

1. Gemeine Elementar-Mathematik
   a. Reine Geometrie
      α. Planimetrie
         aa. Von der Gleichheit und Ungleichheit der Figuren
         bb. Von dem Verhältnisse und der Aehnlichkeit der Figuren
      β. Stereometrie
         aa. Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und der Ebenen gegen einander
         bb. Die Lehre von den geometrischen Körpern
   b. Arithmetik
      α. Von den einfachen arithmetischen Operationen
      β. Von den Verhältnissen
   c. Vermischte Geometrie
      α. Vermischte Planimetrie
         aa. Allgemeine
         bb. Besondere
            αα. Ebene Trigonometrie
            ββ. Ebene Tetragonometrie und Polygonometrie

β. Vermischte Stereometrie

aa. Allgemeine

bb. Besondere, vorzüglich sphärische Trigonometrie.

2. Höhere Elementar-Mathematik

a. Höhere oder unbestimmte Arithmetik

b. Höhere Geometrie.

Nach so vielfältiger Erreichung des vorgesetzten Zieles, als in dem größten Theile der Elementar-Mathematik möglich ist, muß es dem Geiste, der das damit verbundene Vergnügen geschmeckt hat, zumal bey der Empfindung durch thätiges Streben verstärkter Kräfte, unmöglich seyn, in den Schranken zu bleiben, welche ihm die Methode der Elementar-Mathematik setzet. Auch hat er, bey den Anwendungen der Arithmetik auf die Geometrie, gelernt, was für einen Vorzug deutliche Vorstellungen vor bloß klaren haben, und wie sehr dabey gleichsam der Gesichtskreis erweitert und der Wirkungskreis vergrößert werde. Erinnert er sich dabey an die außerordentliche Leichtigkeit und Schnelligkeit, womit er, wenn er vom Allgemeinen ausgieng, von demselben zu dem Besonderen herabsteigen, und dieses aus jenem ableiten

konnte: so ist alles da, was zur Erzeugung des Vorsatzes erfordert wird, alle bisher erwogene Gegenstände unter Einem sie insgesammt umfassenden deutlichen Begriff zusammen zu nehmen, und darauf diesen Begriff auf eben die Art zu behandeln, als in der vermischten Elementar-Geometrie schon mehrere ähnliche, obgleich nicht so weit sich erstreckende, Begriffe behandelt wurden. Dies Verfahren leitet zu einem zweyten Haupttheile der Mathematik, welchen man mit dem Namen, allgemeine Mathematik, belegen kann, weil er sich nicht sowohl mit den in der Elementar-Mathematik untersuchten Arten, als vielmehr mit dem Geschlechte beschäftiget, dem jene, ohne Ausnahme, untergeordnet sind. Es unterscheidet sich also die allgemeine Mathematik von der Elementar-Mathematik zuvörderst, nicht durch den Gegenstand sondern, dadurch, daß sie ihre Objecte, (obgleich, wie nachher bemerkt werden wird, vermittelst Constructionen, doch nicht, wie die Elementar-Mathematik in denselben, sondern) in Begriffen untersucht. Ferner steigt die Elementar-Mathematik, wenn sie auch öfters die Eigenschaften der Arten aus allgemeinen Quel-

sen herleitet, immer zuvor von dem Besondern zum Allgemeinen auf, und bleibt dabey auf niedrigen Stufen stehen; dagegen die allgemeine Mathematik jedesmal von dem höchsten Geschlechte anfängt, und stufenweise herabsteigt. Da sich auf diese Art die allgemeine Mathematik an die Elementar-Mathematik auf mehr denn eine Weise anknüpft: so steht nur alsdenn ein möglichst leichtes, sicheres und nützliches Fortschreiten in ihrem Gebiete zu hoffen, wenn man aus der Elementar-Mathematik Charten und Compaß mitbringt. Ohne Gleichniß zu reden, so ist die Elementar-Mathematik ein Werk von solchem Umfange und solcher Mannigfaltigkeit, und dabey so ohne Beyhülfe der Erfahrung errichtet, daß es unserm Geiste, wenn es, von ihm selbst aufgeführt, dasteht, zum Spiegel dienen kann, worin er seine Kräfte, und zugleich die Art ihres rechten Gebrauchs zu erblicken im Stande ist; und zwar so, daß er da, wo er nicht mehr deutlich zu erkennen vermag, doch mit Gewißheit Abwesenheit undurchdringlicher Schranken wahrnehmen und Hoffnung schöpfen kann, er werde, bey fortgesetztem Streben, auch hier bald deutlich erken-

nen, und dann vielleicht selbst neue Kräfte in sich, oder doch neue bis jetzt von ihm noch nicht betretene Wege entdecken. Alles, was sich bey dieser Betrachtung der Elementar-Mathematik einem aufmerksamen und sorgfältigen Beobachter darbieten kann, (es mag die Kräfte unsers Geistes, welche er, ohne Hülfe der Erfahrung, mit glücklichem Erfolge zu brauchen fähig ist, oder die beste und vortheilhafteste Art des Gebrauchs dieser Kräfte, oder die Natur der Gegenstände, wobey sie sich thätig beweisen können, oder das dabey zu erreichende Ziel u. s. w. betreffen), in einer natürlichen Ordnung gesammlet, und durch Nachdenken ausführlich und selbst bis dahin entwickelt, daß es auch auf den an die bisherigen sich anschließenden, aber noch nicht betretenen, und vielleicht von jenen in mancherley Rücksicht verschiedenen Wegen zum Leitfaden dienen könne; muß daher auch, wenn man in der allgemeinen Mathematik, eben so wie in der Elementar-Mathematik, jeden Schritt mit Sicherheit und Gewißheit thun will, den Uebergang oder den vorbereitenden Theil der allgemeinen Mathematik ausmachen. Nunmehr ist es Zeit, von einem deutlichen Begriffe der Größe

auszugehen, und stufenweise zu den Arten derselben herabzusteigen. Da zu einem deutlichen Begriffe der Größe Vorstellung von den Bestandtheilen derselben und von der Menge dieser Bestandtheile in ihr gehört: so lassen sich, bey der allgemeinen Untersuchung der Größe, folgende Fälle gedenken, auf welchen die Haupttheile der allgemeinen Mathematik beruhen. Einmal können die Bestandtheile, aus welchen man die untersuchten Größen bestehen läßt, entweder ebenfalls Größen, oder Größen-Einheiten, Elemente im strengen Sinne, seyn. Ferner können dieselben im ersten Falle entweder in jeder aus ihnen bestehenden Größe alle einander gleich angenommen werden, oder es kann diese Bedingung wegfallen. Endlich kann, wenn die Bestandtheile in jeder aus ihnen bestehenden Größe einander gleiche Größen sind, das Gesuchte, nach der Natur des Gegebenen, entweder bestimmt, oder nur unbestimmt gefunden werden. Auf diese Art begreift die

Allgemeine Mathematik

1. Die niedere allgemeine Mathematik, welche die Größen aus einander gleichen Bestandtheilen bestehen läßt, und sich

a. in die bestimmte, und

b. in die unbestimmte niedere allgemeine Mathematik theilet.

2. Die höhere allgemeine Mathematik, worin die Größen zum Theil als aus gleichen, zum Theil als aus ungleichen Bestandtheilen zusammengesetzt gedacht werden. Sie theilet sich in zwey Theile,

a. in die Lehre von den Differenzen, welche, wenn die Größen gegeben sind, die Bestandtheile derselben, und

b. in die Lehre von den Summen, welche aus gegebenen Differenzen die Größen finden lehrt, wozu diese Differenzen gehören.

3. Die transcendentale Mathematik, in welcher die Bestandtheile, woraus man die untersuchten Größen bestehen läßt, Größen-Eintheilen oder Elemente im strengen Sinne sind. Auch diese hat zwey Theile,

a. die Differenzial-Rechnung, und

b. die Integral-Rechnung.

Da die Sätze, welche man in der allgemeinen Mathematik findet, auf keine Weise bloß dazu dienen, die Sätze der Elementar-Mathematik

auf eine andere Art zu ordnen, und sie etwa einer leichten Uebersicht näher zu bringen; sondern dadurch auch die Kenntnisse von den Elementar-Gegenständen auf eine bewunderswerthe Art erweitert, und die bekannten größtentheils auf viel kürzern und leichtern Wegen gefunden werden können: so ist es natürlich, die Lehren der allgemeinen Mathematik, nach ihrer Erfindung, zu diesen Vortheilen zu benutzen; und deswegen kann jeder Haupttheil der allgemeinen Mathematik aus einem reinen und einem angewandten Theile bestehen, so daß der letztere die in dem erstern enthaltenen Sätze theils auf die discreten, theils auf die continuirlichen Größen anwende.

So groß die Menge der Gegenstände ist, welche das auf diese Art bebaute Feld der Mathematik enthält, so steht dabey gleichwohl noch ein sehr fruchtbarer Theil dieses Feldes leer. Wir waren in der Arithmetik gezwungen, statt eines Punktes, der oftmals gedacht werden sollte, mehrere außer einander befindliche Punkte zu nehmen. Indem wir dieses thun, versetzen wir einen und denselben Punkt von da, wo wir ihn anfänglich uns vorstellten, nach und

nach an verschiedene andere Oerter, und dieses sind wir nicht anders zu thun im Stande, als so, daß wir ihn dabey zugleich durch alle zwischenliegende Oerter hindurchführen. Erwägen wir das, was wir auf diese Art thun, genau; zerlegen wir die Operationen und Vorstellungen unsers Geistes hierbey in ihre Bestandtheile; suchen wir darauf auch hier die Abhängigkeit der sich uns darbietenden Dinge von einander kennen zu lernen und zu bestimmen; und setzen wir dieses Geschäfte durch das ganze vor uns liegende bebaute Feld der vermischten Geometrie fort: so wirken wir in dem Gebiete der reinen Mechanik, eines neuen Haupttheils der Mathematik, der eben so unabhängig von aller Erfahrung seyn kann und seyn muß, als die übrigen. Aus mehr denn einer Ursache ist derselbe erst jetzt möglich, und wäre er es, seinem Anfange nach, eher, so könnte es nachtheilig werden, ihn früher zu bearbeiten, weil er, ohne die Hülfe der transcendentalen Mathematik, nicht anders als in einer armseligen Gestalt erscheinen kann. Aber fehlen darf er nicht, sonst fehlt der Mathematik das erhabenste, das wichtigste und fruchtbarste. Uebrigens berühre ich diesen

Haupttheil nur, und entwickele ihn nicht weiter, weil hierzu eine eigene Abhandlung nöthig ist.

Jetzt, wie es scheinen kann, mit Schranken umgeben, die unserer Wirksamkeit ein Ziel setzen, was bleibt uns zunächst übrig, als von neuem, so wie am Ende des Gebiets der Elementar-Mathematik, zurückzublicken; die Natur der Gegenstände zu erwägen, mit welchen wir uns beschäftiget haben; die Wege zu überlegen, welche wir dabey einschlugen; nachzudenken über die Kräfte, welche sich beym ernstlichen Streben nach und nach in uns entwickelten; das auszuheben und zur etwanigen künftigen Benutzung weiter zu bearbeiten, was vor andern den glücklichen Erfolg unserer Bemühungen beförderte; und hier insbesondere dabey zu verweilen, daß, und wie wir, durchs Aufsteigen vom Besondern zum Allgemeinen, in der allgemeinen Mathematik, auf eine vorher nicht zu erkennende, bewundernswürdige Art, unsere Sphäre erweiterten und unsere Wirksamkeit ausbreiteten. Folgen wir dem Triebe, der bey diesen Betrachtungen nicht ungeweckt und unthätig bleiben kann: so tritt der Begriff des

Dinges, zuerst des bloß leidentlich sich verhaltenden, dann aber auch des wirksam sich beweisenden, an die Stelle des Begriffs der Größe; und welche Wonne, so abermals ein neues Feld vor sich zu erblicken, das bey aller seiner Größe und Wichtigkeit dennoch weit mehr Vergnügen und Vortheil verspricht, als es Arbeit und Anstrengung fordert.

Indeß, so weit wir uns auch auf diese Art ausbreiten mögen, so schweben wir dabey gleichwohl stets in den Regionen des Gedenkbaren; und da wir uns des Gebrauchs der Sinne zwar beym Speculiren, aber nicht im Leben entschlagen können, da unser Geist außer dem, was er gleichsam selbst erschafft, eine Menge von Gegenständen wahrnimmt und kennt, die sich vermittelst der Sinne ihm darstellen: so entsteht nunmehr die wichtige Frage: Giebt es auch für uns ein von der Erfahrung und selbst von allen Eindrücken der Sinne unabhängiges Erkenntniß wirklicher Dinge *)? und nach derselben: Worauf und wie weit erstreckt sich das-

*) Man vergleiche hier Hrn. Kants Einleitung in die Critik der reinen Vernunft.

selbe? Auf diese Weise führt der bisher beschriebene Weg endlich zu dem Gebiete, in welchem Herr Kant, sowohl dem Rechte der Erwerbung als der wahren Behandlung nach, herrscht: zu dem Gebiete der Critik der reinen Vernunft und der Philosophie. Es wäre überflüssig, den Umfang durch Linien andeuten zu wollen, wenn in den wichtigsten Theilen das Gemälde schon vollendet dasteht, und deswegen könnte ich hier meine vorläufige Untersuchung schließen. Aber auch folgende Frage liegt nun uns nahe: Wie kann das, was wir, ohne Beyhülfe der Erfahrung, erkannt haben, gebraucht werden, um dadurch nicht nur die Sphäre unserer Sinnen zu erweitern, sondern auch ihre Kraft zum tiefern Eindringen zu verstärken? und es fällt bey einigem Nachdenken bald in die Augen, daß die Beantwortung derselben zuvörderst auf die angewandte Mathematik und Philosophie, dann auf die mit dem Namen der Wissenschaften belegten Disciplinen, und endlich auf Anleitungen zu gelehrten praktischen Kenntnissen führe.

Hier endige ich meine vorbereitende Untersuchung. Die Beantwortung der beyden Seite 118 stehenden Fragen, welche nach derselben mit keiner Schwierigkeit verbunden seyn kann, aber gleichwohl mehr Platz erfordert, als ich ihr hier einräumen darf, soll in einem der folgenden Stücke ihre Stelle bekommen.

III. Nachrichten.

1. Von der Art und Weise, wie ich den im vorhergehenden Stücke S. 45. f. mitgetheilten Plan meiner Lehrer-Beschäftigungen im Berlinischen Gymnasium auszuführen angefangen habe.

Die gegenwärtige Nachricht von der Art und Weise, wie ich meinen Pflichten als öffentlicher Lehrer der Mathematik und Physik ein Genüge zu thun gesucht habe, betrifft den Zeitraum vom 12ten April bis zum 20sten May des jetzigen Jahres, und erstreckt sich lediglich auf meinen Unterricht in der Mathematik. Was die Anweisung zur Physik und zum Studium der Geschichte der Mathematik anlangt, welche ich den Berlinischen Gymnasiasten außerdem ertheile: so werde ich davon zu einer andern Zeit reden.

Mit den Gymnasiasten der dritten oder untersten Classe habe ich mich über die Erklärungen und Forderungen, welche den Anfang des ersten Buchs der Euclideischen Elemente ausmachen, auf die Art unterredet, daß ich sie, ohne ihnen ein Buch in die Hände zu geben, durch die Gedanken-Reihe geleitet habe, welche man in meiner für die nächste Michaelis-Messe bestimmten Ausgabe der Elemente des Euclides, für den gegenwärtigen Zustand der Mathematik bearbeitet, erweitert und fortgesetzt, und zwar in der ersten Abtheilung S. 7 bis 20 finden wird. Da ich diesen Anfang meines für die zweyte und erste Classe zu verfertigenden vollständigen Lehrbuchs der Mathematik in dem folgenden Stücke, mit erläuternden Anmerkungen begleitet, als eine Probe mittheilen werde: so kann ich es hier bey folgendem bewenden lassen.

Ich habe es auch dieses Mal, so wie schon oft erfahren, daß die Methode des bloßen Hinleitens zu dem, was erkannt und gefaßt werden soll, für Anfänger in der Mathematik die vortheilhafteste sey. Außerdem, daß dabey Erinnerungen zur Anstrengung der Aufmerksamkeit ziemlich überflüssig werden, weil der Schüler,

wenn

wenn ihm der Gebrauch des Nachdenkens möglich und nothwendig gemacht, und nicht bloß fürs Gedächtniß gesorgt wird, sich von freyen Stücken thätig beweist: so ist unstreitig das der sicherste und kürzeste Weg, andere zu den Einsichten zu führen, welche man selbst besitzt: wenn man sie unter eben die Umstände versetzt, unter welchen man sich die mitzutheilenden Kenntnisse verschafft hat, und sie ihre Denkfähigkeiten auf ähnliche Art zu gebrauchen leitet, als man sich erinnert, es selbst gethan zu haben. Sowohl die Lernbegierde, welche meine Schüler während meiner Unterredungen bewiesen, als auch die Leichtigkeit, Schnelligkeit und Festigkeit, mit welcher ich gefunden, daß sie die Gegenstände unserer Gespräche sich bekannt gemacht haben, haben mich das Unangenehme gar nicht empfinden lassen, welches sonst oft der Unterricht in den allerersten Anfangsgründen, und so zu sagen in dem A B C der Mathematik zu haben pflegt. Daß die leitende Unterredungs- oder sogenannte sokratische Methode, vorausgesetzt, daß die Natur der Gegenstände, womit man sich beschäftiget, sie erlaube, bey wenigen Schülern zwar, aber nicht bey einer

Menge, brauchbar sey, wie man öfters behauptet hat, scheint mir eine Behauptung zu seyn, die entweder Mangel eigener Versuche, oder, wenn dieser nicht statt finden soll, Mangel an der dabey nöthigen Herablassung verräth.

Die zweyte Classe hat bis jetzt mit der dritten einerley Gegenstände zu untersuchen gehabt, doch mit dem Unterschiede, daß sie bey denselben sich theils mehr ausbreiten, theils tiefer eindringen mußte. Mit dieser Classe bin ich bis zu dem vierten Satze des ersten Buchs der Euclideischen Elemente fortgerückt. Auch hier ist meine Methode leitende Unterredungs-Methode gewesen, und wo sich Gelegenheit dazu fand, habe ich Saamenkörner ausgestreuet, die künftig bey dem Gebrauche der Mathematik bey nicht mathematischen Gegenständen, Früchte tragen können. So viel hier, das Uebrige werden ebenfalls die Anmerkungen zu der versprochenen Probe von dem Lehrbuche enthalten, welches ich in dieser Classe zum Grunde lege.

Was die erste Classe betrifft, so habe ich in den beyden Stunden, welche der angewandten Mathematik gewidmet sind, den Anfang mit einer ausführlichen Unterweisung über die Art

und Weise gemacht, die Wahrheiten der reinen Grössenlehre zur Erfindung der Sätze ihres angewandten Theils auf die beste und leichteste Art zu gebrauchen. Hierbey richte ich, nach den in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik und die Art, die Vollkommenheit und Brauchbarkeit derselben zu vergrößern, S. 70 f. geäußerten Grundsätzen, mein Augenmerk hauptsächlich auf folgende Stücke. Zuerst suche ich mit der Natur und dem großen Umfange der Wissenschaften, die zusammengenommen die angewandte Mathematik geben, bekannt zu machen, und zeige dabey aus Gründen und durch Beyspiele, daß man ohne eine gründliche und vollständige Kenntniß dessen, was jedesmal aus der reinen Mathematik vorausgesetzt wird, in der angewandten auf keinen glücklichen Erfolg rechnen dürfe. Dann lasse ich diejenigen Dinge in der Natur aufsuchen, welche ein Gegenstand der angewandten Mathematik werden können, und so weit als möglich nach ihren Classen, Ordnungen, Geschlechtern und Arten ordnen. Wenn nach dem, was sich auf diesem Wege darbietet, nicht nur die Haupttheile der angewandten Mathematik,

sondern auch die Hauptzweige eines jeden Theils und die nächsten von seinen fernern Aesten gefunden und festgesetzt sind: so folgt eine allgemeine, aber durch zweckmäßige Beyspiele ins gehörige Licht gesetzte Anweisung, wie man zu einem der Construction fähigen Begriffe von den vorhin erwähnten Gegenständen gelange, und wie man dergleichen Begriffe construire. Drittens bemühe ich mich, zu zeigen, wie man aus der Natur des jedesmaligen Gegenstandes zu beurtheilen im Stande sey, welche Sätze aus der reinen Mathematik vor andern mit Vortheil benutzt werden können; wie eine Fertigkeit im Uebersetzen der reinen mathematischen Ausdrücke in die Sprache der angewandten Mathematik erworben werde; und vorzüglich, auf was für einem Wege man zu dem Talente gelange, ohne Beyhülfe sinnlicher Versuche die entdeckten Wahrheiten in voller Klarheit und Gewißheit anzuschauen. Endlich theile ich die Regeln mit, nach welchen die bloß in symbolischen Zeichen gedenkbaren Sätze von den reellen, die ohne sinnliche Erläuterung ganz verständlichen und gewissen von den dergleichen bedürfenden, und die an und für sich brauchbaren von denen, die

mittelbarer Weise materiellen Nutzen gewähren, unterschieden werden können. Ueber die Methode, wobey sich eine solche Einleitung in die angewandte Mathematik allgemein faßlich, angenehm, und selbst in dem Grade nutzbar machen läßt, daß darnach allenfalls der mündliche Unterricht in der angewandten Mathematik entbehrt werden kann, werde ich mich alsdann ausführlich erklären, wenn ich diese Einleitung zu Ende gebracht habe, und dann auch aufrichtig sagen, in wie fern und wie weit mir meine Absicht gelungen ist.

2. Nachrichten von den neuesten mathematischen Schriften.

Berlin, bey Unger. Geometrie für Soldaten, und die es nicht sind, von G. F. von Tempelhof, Königl. Preuß. Obrist=Lieutenant. Mit 30 Kupfertafeln. 1790. 380 Seiten. 8. 1 thlr. 8 gr.

Leipzig, bey Crusius. Erste Geometrie für Kinder und Jünglinge und fürs gemeine Leben, von Friedr. Gottl. Busse, Professor rc. Erster Theil, zweyte Auflage, 1789. 142 S.

8. Zweyter Theil, 1790. 44 S. 8. Beyde Theile 12 gr.

Berlin, bey Matzdorff. Anleitung zur Selbsterlernung der Geometrie in Briefen. Insbesondere für diejenigen, welche dabey Euclides Elemente und Hrn. Hofr. Kästners Anfangsgründe zum Grunde legen wollen. Von J. A. C. Michelsen. Erster Band. 1790. 224 S. 8. 14 gr.

Der Hr. Obrist-Lieut. v. Tempelhof hat sein Werk, über dessen Werth ich mich im Allgemeinen bereits im ersten Stücke S. 76. 77 erklärt habe, in Stunden eingetheilt, theils um dadurch Anfängern einigermaßen begreiflich zu machen, daß die Erlernung der Geometrie kein Menschenalter erfordere, theils um ihnen gewisse Ruhepunkte zu verschaffen; und darin die sechs ersten Bücher der Euclideischen Elemente bearbeitet. Es enthält ein und vierzig Stunden. In der ersten Stunde wird von der geraden Linie gesprochen; den Gegenstand der zweyten machen die Grundsätze der Geometrie aus; in der 3ten wird geredet von den Winkeln; in der 4ten vom Augenmaße und der geometrischen Methode; in der 5ten von den Drey-

ecken und dem Kreise überhaupt; in der 6ten und 7ten von den Eigenschaften der Dreyecke; in der 8ten werden einige, gerade Linien, geradlinige Winkel und Dreyecke betreffende, Aufgaben aufgelöset; in der 9ten, 10ten und 11ten wird von den Parallel-Linien gehandelt; in der 12ten wird der Gebrauch der dagewesenen Lehrsätze in der Taktik gezeigt; in der 13ten werden die Eigenschaften der Parallelogramme untersucht; in der 14ten ebene Figuren mit einander verglichen, und die 15te ist dem Pythagorischen Lehrsatze gewidmet. In der 16ten Stunde wird der Anfang mit der Untersuchung des Kreises gemacht; in der 17ten werden die Sehnen, in der 18ten die Tangenten, in der 19ten die Winkel beym Kreise betrachtet. Die 20 bis 23ste Stunde werden auf praktische Gegenstände verwendet, indem darin vom Messen, den dabey üblichen Maßen und den Werkzeugen zum Messen, sowohl gerader Linien als geradliniger Winkel, geredet wird. Mit der 24sten Stunde geht der Unterricht über die Verhältnisse an; in der 25sten (wofür der Hr. Setzer die 26ste gesetzt hat), in der 26sten und 27sten werden die Eigenschaften der Proportionen erklärt; eine 28ste

Stunde findet man nicht; in der 29sten aber eine Anwendung der Lehre von den Proportionen auf einige militärische Rechnungen. Die 30ste Stunde handelt von den Proportional-Linien; die 31ste von der Aehnlichkeit der Figuren; die erste 32ste vom Kopiren und Verjüngen der Figuren; die zweyte 32ste und 33ste von den Proportionen beym Kreise; die 34 bis 36ste von den zusammengesetzten Verhältnissen; die 37ste von der Vergleichung des Flächen-Inhalts ebener Figuren; die 38ste von der Berechnung dieses Flächen-Inhalts; die 39ste von der Quadratur des Zirkels; und die 40ste und 41ste enthalten eine Verbreitung zum Aufnehmen oder zur Vermessung einer Gegend oder ganzer Länder. Hr. Busse handelt im ersten Theile seiner Geometrie vom Punkte, von den Linien und ihren Arten, und bey den geraden Linien auch von denen auf dem Felde, ihrer Messung, und den dabey üblichen Haupt-Maßen und ihrer Vergleichung unter einander; von ebenen Oberflächen, von Winkeln, vom Kreise, vom Gradwinkel und Gradbogen, vom Transporteur und dessen Gebrauche; von den Nebenwinkeln und senkrechten Linien, von den Vertikalwinkeln;

ferner, nach mitgetheilten Grundsätzen von ebenen Flächen, von der Deckung der Dreyecke, wobey zugleich der praktische Gebrauch der vorgetragenen Sätze gelehret, und die dabey nöthigen Werkzeuge, der Meßtisch nebst dem Diopter-Lineale und das Astrolabium, beschrieben werden; und auf ähnliche Art werden nunmehr, theils theoretisch theils praktisch, verschiedene, gerade Linien und Winkel betreffende Aufgaben aufgelöset. Hierauf geht Hr. Busse zur Schneidung gerader Linien, zur Betrachtung der Parallel-Linien und der Parallelogramme fort, redet dann vom Quadrat-Maße, von der Ausmessung der Rechtecke, der Quadrate, der Dreyecke und jeder geradlinigen Figur; endlich von der Berechnung der Kreisfläche und der Berechnung des Dreyecks aus seinen Seiten, und zuletzt von der Ausziehung der Quadrat-Wurzel. In dem zweyten Theile wird, nach einigen Sätzen aus der Lehre von der Lage gerader Linien gegen Ebenen und der Ebenen gegen einander und dem Grundsatze von gleich großen Körpern, von den prismatischen Körpern, dem Prisma, dem Parallelepipedum, dem Würfel und dem Cylinder, dann von den Pyramiden und dem Kegel,

desgleichen von der Kugel so gehandelt, daß der Begriff aller dieser Körper mitgetheilt, die vornehmsten Eigenschaften derselben erklärt, und zuletzt ihre Berechnung gelehret wird. Den Beschluß macht eine kurze Abhandlung vom Visiren der gewöhnlichsten Tonnen und der dabey gebräuchlichen Stäbe. In meiner Schrift endlich findet man, nach einer kurzen Einleitung, folgende Abhandlungen. Ueber die geometrische Methode und die Nothwendigkeit des Studiums der Geometrie für jeden Studirenden, S. 7—42; Anmerkungen zu den Erklärungen, Foderungen und Grundsätzen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente, S. 43—78; Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides, S. 79—158; Anmerkungen zu dem zweyten Buche der Elemente des Euclides, S. 158—209; über einige Sätze des dritten, S. 209—219, und des vierten Buchs des Euclides, S. 219—224. Der Hr. Obrist-Lieut. von Tempelhof und Hr. Busse haben auf dem Titelblatte ihrer Werke ausdrücklich angegeben, für was für Schüler sie geschrieben haben; meine Schrift habe ich vorzüglich denen nützlich machen wollen, welche

die Mathematik der durch sie möglichen formellen Vortheile wegen treiben; und was die Absicht betrifft, so vereiniget der Hr. von Tempelhof die beyden Zwecke, welche Hr. Busse und ich einzeln haben. Bey diesen Umständen macht keine dieser Schriften, ob sie gleich alle drey einerley Gegenstand bearbeiten, die übrigen überflüssig, und man hat, um eine zu loben, nicht nöthig, die andern zu verachten. Von Hrn. von Tempelhofs und Hrn. Bussens Geometrie könnte ich an sehr vielen Beyspielen zeigen, wie unrecht man handeln würde, wenn man sie nicht zu den zweckmäßig eingerichteten und guten Schriften zählen wollte; über mein Buch soll mir jede Belehrung von Kennern schätzbar und willkommen seyn. Um in Ansehung des ersten Werks einen Schluß a minori ad majus zu veranlassen, setze ich aus dem Anfange desselben folgende meisterhafte praktische Beschreibung der geraden Linie her. „Es ist nicht schwer, sich eine gerade Linie vorzustellen. Wir gewöhnen uns schon sehr frühzeitig, in Gedanken von unserm Auge nach jedem Gegenstande, den wir vor uns sehn, eine gerade Linie zu ziehen. Wenn wir eine Reihe Bäume vor uns sehen, und einer den

andern dergestalt bedeckt, daß wir nur Einen zu sehen glauben: so sagen wir, sie liegen in einer geraden Linie; und eben so urtheilen wir, wenn dieses bey andern Gegenständen statt findet." „Wenn wir dabey etwas genauer nachsehen, so begreifen wir leicht, daß die Bäume nicht die gerade Linie selbst sind, eben so wenig als andere Gegenstände, die uns in einer geraden Linie erscheinen. Wir stellen uns die gerade Linie als etwas davon ganz verschiedenes vor, als eine Sache, die bloß in unsern Gedanken da ist, und bey der wir gar nicht nöthig haben, eine Breite und Dicke zu denken, welches doch bey allen andern Dingen in der Natur geschehen muß. Unser Urtheil vom Geradeseyn gründet sich bloß auf die Lage der Punkte, die wir uns in einer Linie vorstellen. Ist diese so beschaffen, daß, wenn man das Auge bey dem ersten anlegt, alle übrige zusammen von diesem ersten bedeckt werden, und nur als ein Punkt erscheinen; so liegen sie in einer geraden Linie." Mehr anzuführen halte ich deswegen für überflüssig, weil, meiner Meinung nach, alle diejenigen, welchen an einer vollständigen Kenntniß dieser Schrift gelegen ist, nicht zu sehr eilen

können, sich dieselbe anzuschaffen, und selbst zu studiren. Von Hrn. Bussens Schrift ist der erste Theil in kurzer Zeit vergriffen worden, und so käme ich hier mit Proben zu spät, wodurch ich beweisen könnte, daß darin viel eigenes und gedachtes enthalten sey; im zweyten Theile wird S. 36 f. eine neue Visir-Regel mitgetheilt. Aus meiner Schrift setze ich den Schluß her, bloß in der Absicht, auf den darin berührten Gegenstand aufmerksam zu machen, und einen oder den andern zu seiner Bearbeitung zu veranlassen. „Und nun noch eine Aussicht zum Sporn für ihre Lernbegierde. Die Deutlichkeit und Gewißheit, wodurch sich ihnen die Mathematik bisher von einer so reizenden Seite gezeigt hat, ist kein Blendwerk, sondern so wahr, daß alle deswegen der Mathematik allgemein ertheilte Lobsprüche ihr nie werden entzogen werden. Aber ich hoffe, ihnen in der Folge zu beweisen, daß alle Deutlichkeit und Gewißheit der Elementar-Mathematik, und insbesondere die der reinen Elementar-Geometrie, nur die unterste Stufe der uns in der Mathematik erreichbaren Deutlichkeit und Gewißheit sey. Es ist das keine neue Behauptung,

wenigstens werde ich ihnen künftig, in den Schriften der Bewährtesten unter den Mathematikern, Stellen nachweisen, welche dazu hinleiten können. Aber verkannt kann diese Wahrheit seyn, ja ich glaube den Fehltritt zu kennen, durch welchen sich ein großer Theil, insbesondere der neuern Mathematiker und Philosophen, den Zugang dazu verschlossen hat. Doch sie darf nicht verkannt bleiben, sonst bliebe auch noch länger der Vorwurf unwiderlegbar: Gott habe es uns nicht möglich gelassen, bey den wichtigsten Gegenständen der menschlichen Erkenntniß, d. h. in Ansehung seines Daseyns und seiner über alles waltenden Vorsehung, ferner in Ansehung des Wesens unserer Seele, ihrer Bestimmung und der Art, wie dieselbe erfüllt werden kann, einen eben so hohen Grad der Deutlichkeit und Gewißheit zu erreichen, als uns in einer Wissenschaft sogar leicht ist, die der größte Theil der Menschen kaum den Namen nach kennt, und ein großer Theil auch nicht einmal zu kennen braucht. Das werden Sie von mir zum voraus versichert seyn, daß ich, wenn ich bey verschiedenen Dingen von einem gleich hohen Grade der Deutlichkeit und Gewißheit rede,

deswegen nicht behaupte, es gebe auch nur eine Leiter, auf welcher man diese höchste Stufe hinanklimmen müsse. Jetzt ist es bloß meine Absicht, eine reizende Aussicht in der Ferne zu zeigen. Was für Wege dazu führen? was für Gegenstände sie da erblicken werden? wo das gezeigte Ziel sich befinde? sollen sie künftig sehen. Also ohne jezt durch unnützes Grübeln die Zeit zu verderben, und ohne mir beyzulegen, daß ich mich durch eine Einbildung täuschen lasse, weil ich ihnen einen Wink gegeben habe, der sie, wenn sie ihn ohne weitere Belehrung mißbrauchen wollten, irre führen könnte, überlegen sie bisweilen folgende Stelle aus einer ihnen bekannten Fabel.

Vielleicht, daß mancher eh die Wahrheit finden sollte,
Wenn er mit mindrer Müh' die Wahrheit suchen wollte.
Und mancher hätte sie wohl zeitiger entdeckt,
Wofern er nicht geglaubt, sie wäre tief versteckt.
Verborgen ist sie wohl; allein nicht so verborgen,
Daß du der finstern Schriften Wust,
Um sie zu sehn, mit tausend Sorgen,
Bis auf den Grund durchwühlen mußt.

Verlaß dich nicht auf fremde Müh',
Such selbst, such aufmerksam, such oft; du findest sie.
Die Wahrheit, lieber Freund! die alle nöthig haben,
Die uns als Menschen glücklich macht,
Ward von der weisen Hand, die sie uns zugedacht,
Nur leicht verdeckt, nicht tief vergraben.

Münster und Osnabrück, bey Perrenon. Chr. Lud. Reinhold ꝛc. Maschinenbaukunst, oder das Studium über neue und nützliche Rüstzeuge und Instrumente. Erster Theil, mit vielen Kupfern. 1790. 152 S. 4. 1 thl. 8 gr.

Ein sehr reichhaltiges und dabey originelles Werk, dessen Verfasser Geschichte, Theorie und praktische Anweisung, altes und neues mit einander zu verbinden weiß, und eben so leicht Gelehrten Räthsel aufgiebt, als er sich zu Anfängern herabläßt. Wider die Reichhaltigkeit wird Niemand etwas einwenden, der mit einem flüchtigen Blicke das beynahe zwey Bogen füllende Verzeichniß der abgehandelten Gegenstände durchläuft. Die Titel der hier stehenden Titel sind: Von den Körpern und deren Bewegung.

zung; Grundsätze der Dynamik; Grundsätze der Mechanik; von den Rollen und Flaschenzügen und deren Berechnung; von den schiefliegenden Flächen, dem Keile und der Schraube; von den Rädern und deren verschiedenen Zusammensetzungen; vom Perpendikel und dessen Bewegung; Anwendung der Räder bey den Uhren, von der Berechnung des Schlagwerks einer Uhr; von der Berechnung und Zusammensetzung eines Repetir-Werks; Bedürfnisse und Regeln beym Maschinenbau; Beschreibung einer neuen Sägemaschine; Beschreibung einer neuen Buchdrucker-Presse; Beschreibung einer neuen Oelpresse und Quetschmaschine; Beschreibung eines neuen Schwung- und Schöpfrades; Beschreibung einer Feuermaschine, mit welcher man eine Last in die Höhe treiben, fortschleudern, schießen, oder auch das Wasser zum Springen bringen kann. Die Originalität zeigt sich sogar denen, welche etwa zu später sich findenden Proben keine Lust haben mögten, auch schon in dem gedachten Verzeichnisse. Oder sollte der Hr. V. Vorgänger in Titeln folgender Art haben? Aus der gegebenen Kraft CA ꝛc. Aus der gegebenen Länge des Hebels AB = 12 Fuß ꝛc.?

Wie weislich wird es dadurch dem Leser, und also natürlich auch dem Recensenten, unmöglich gemacht, bey der Inhalts-Anzeige stehen zu bleiben! Welche musterhafte Kürze ferner, wenn, was Archimedes, Galiläus und Borellus, Alembert, Barrow und Sturm, Newton, Varignon, Johann Bernoulli und Sohn, Hr. Hofr. Kästner, und zuletzt Hr. de la Hire mit Johann Bernoulli gethan und beobachtet haben, in eilf Zeilen und zwey Silben zusammengedrängt wird! so wie unstreitig, ebenfalls bloß der Kürze wegen, Hrn. Karstens und Hrn. Mönnichs hieher gehörige Schriften unter den vierzig herrlichen Werken, die hier angeführt, und mit Reinholds Mechanica forensis oder aufs Recht angewandten Bewegungskunst voll gemacht worden sind, nicht stehen. Kann der Theoretiker mehr verlangen? wenn er z. B. wissen will, wie der Fall im luftleeren Raume sey? und darüber §. 23 findet: Demnach fallen leichte und schwere Körper im luftleeren Raume gleich geschwind, oder vollenden gleiche Räume in gleicher Zeit. Denn fällt ein leichter Körper A durch 9 Schuhe, und ein anderer schwerer Körper B ebenfalls durch 9 Schuhe: so sind die

Wurzeln ihrer Räume, und folglich auch ihre Geschwindigkeiten, einander gleich. Fällt z. B. ein Pfund Bley, so ist es so viel, als wenn 32 einzelne Lothe zugleich zu fallen anfiengen. Erreichet also das Pfund Bley den Boden: so ist es so viel, als wenn 32 einzelne Lothe zugleich auf denselben kämen. Da also jegliches Loth für sich so geschwind fällt, als das andere: so fällt auch jegliches Loth so geschwind als 32 Loth, welche zu gleicher Zeit zu fallen anfangen, und folglich so geschwind als ein ganzes Pfund. Und ist es nicht äußerst lehrreich für Praktiker? wenn sie über die Art und Weise, die Räder und Getriebe, sowohl im Uhrgehäuse als Vorleg-Werk gehörig zusammen zu setzen, folgenden Unterricht erhalten: Man addire den Radium des Rades o b vom Centro bis an den mittelsten Zirkel, zu dem Radio des Getriebes b p, gleichfalls vom Centro des Getriebes o bis an den mittelsten Kreis; die Summe o p giebt die Weite der Mittelpunkte o und p; damit fahre man fort, so wird, wenn anders in der Ausarbeitung nicht ist gefehlt worden, die Uhr richtig zusammengesetzt seyn. Freylich sollte hier das zu dieser Regel gehörige Kupfer mitgetheilt

werden, indem dieselbe dadurch erst das rechte Gewicht bekommt; wenn nur nicht zu befürchten wäre, daß die Copie zu weit hinter dem Originale bleiben mögte. Daß viel altes vorkomme, bedarf keines Beweises; was neu seyn soll? zeigen in den wichtigsten Fällen die Ueberschriften an. Zwar hat dabey bereits ein anderer Recensent einige Bedenklichkeiten wegen der Rechtmäßigkeit des Gebrauchs des Worts neu geäußert; allein man weiß, wie manche Recensenten sind. Er hätte überlegen sollen, daß das Wort neu eben sowohl als andere Wörter auch tropische Bedeutungen haben, und daß von den Sprachlehrern das Verhältniß des bey der Synecdoche vorkommenden Theils zum Ganzen noch nicht so genau bestimmt worden sey, um nicht hier und da nach der Regel handeln zu dürfen: a minori fiat denominatio. Für Gelehrte gehört z. B.: Es hat Naturforscher gegeben, und giebt vielleicht noch welche, welche alle Materien in der Welt für einerley Stoff halten, und ihre specifike Eigenschaft in der Figur der Körperstoffe suchen wollen. Diese mechanische oder besser mathematische Sekte hat freylich mehr vor sich, als alle übrigen, welche

ungeheure Systeme von Hypothesen gebauet haben. Freylich fehlet es dieser mathematischen oder mechanischen Sekte an der gänzlichen Ausführung ihres Systems noch; allein man lasse nur erst mehrere Euclide, Archimedes, Newtons, Leibnitze, Wolfs, Eulers und Kästners gebohren werden; dann wird man erfahren, wie wahr es sey, daß die besondere Figur eines jeden Elementarkörpers ihm seine eigentliche Richtung gebe, und daß gleichartige Körper so viel heiße, als gleichfigurirte Elementarstoffe, und ungleichartige Körper so viel, als verschiedentlich figurirte Elementarstoffe. Das Mikroskop führet einen großen Beweis dieses Satzes; und was werden wir vielleicht erfahren, wenn ein Herrschel die Mikroskope so verstärkt, wie er die Teleskope würklich verstärkt hat: dann würden wir vielleicht tausende neue Sternen in der Elementarsphäre entdecken, und den Elementarstoffen vielleicht bis auf einen Schritt nahe kommen, oder wenigstens doch da Vulkane entdecken, wo wir jetzt kaum Funken spüren. In der Geometrie hat man die fünf regulären Körper (corpora platonica), die man ohne

Zwischenraum zusammenfügen kann, und die also einen vollkommen dichten Körper bilden würden, wenn sie seine Bestandtheile ausmachten. Man hält auch in der Naturlehre dafür, daß die Körper desto härter und fester sind, je mehr Berührungspunkte die Bestandtheile unter sich haben, und also würde hier schon die Figur die Dichtheit und Härte geben. Es ist gewiß, daß die runde Figur die geschickteste zur Bewegung ist, und die Natur bestätigt auch diesen Satz, indem sie alles dasjenige, was sich leicht oder beständig bewegen soll, kugelförmig gebildet hat. Die kleinsten Theile, die man von allen flüssigen Wesen noch hat entdecken können, sind Kügelchen." „Die großen Weltkörper, welche durch die Bewegung ihren Zustand erhalten müssen, sind alle durch die runde Figur dazu geschickt gemacht. Sie können eingerichtet seyn, daß sie sich selbst einen neuen Schwung geben, wie z. B. das mechanische Männchen beym Muschenbroeck, welches unendlich viele Staffeln absteigen würde, wenn sie vorhanden wären. Hr. von Büffon, und mit ihm de Lüc, sind der Meynung, daß die Berge eine Ursache

der Umwälzung der Erde wären; wenigstens können sie eine Mitwürkung seyn: denn fast alle erschaffene Dinge haben mehr Zwecke, wie einen. So leuchtet die Sonne, sie wärmet, theilet die Zeit, und wer weiß, wie viel tausend Eigenschaften sie mehr hat. Die Weltkörper können aber auch im Innern gehöhlet, und mit einem Gas, oder wie es die Alten nannten, mit dem Wesen des Daimogorgons gefüllet seyn. Die Kreisbewegung der Weltkörper ist vermuthlich ein Gemisch von anziehenden Centripetal- und Centrifugalkräften, die so verhältnißmäßig abgezirkelt seyn können, daß der Weltkörper durch unendlich viele Diagonal-Linien einen Kreis beschreiben muß. Und also ist auch die Kreislinie die geschickteste zur Bewegung, und es ist wohl gar die Umwälzung der Weltkörper die erste Ursache der Schwere und der Centralkräfte. Man kann sich im Kleinen davon durch den Versuch des Hrn. Abts Nollets überzeugen, wo er in eine mit Wasser gefüllte gläserne Kugel ein Kügelchen Quecksilber, etwa ein Loth schwer, wirft; so lange diese gläserne Kugel ohne Bewegung ist, ruhet das Quecksilber zu unterst in der

Kugel; wird sie aber schnell um ihre Axe gedrehet, so setzet sich das Quecksilber als einen langen Stab nach der Richtung der Axe der Kugel in den Mittelpunkt der gläsernen Kugel. Hat nun dieser Versuch seine Richtigkeit, so ist er der einleuchtendste Beweis, daß die Schwung- oder Axenbewegung der Weltkörper die Ursache der Centralkräfte sey. Wir erfahren ferner, was die Bewegung für Wunder in der Electricität thut; diese theilet den Körpern nicht allein eine anziehende und fortstoßende Kraft mit, sondern sie bemächtigt sich auch der feinsten Materie, nemlich des Feuers und des Lichts. Und vielleicht ist also die Umwälzung der Erde auch der Grund zu der magnetischen Materie. Dringt man tiefer in die Naturlehre, so wird man sich von allem diesen noch mehr überzeugender belehren können." Aus Herablassung zu Anfängern endlich rührt es unstreitig her, daß man gar nicht nöthig hat, sich durch einen ermüdenden Calcul durchzuarbeiten; und es ist dies sicher ein um so größeres Verdienst, da selbst Kenner der Mathematik behauptet haben, es sey unmöglich, in der Mechanik, ohne Beyhülfe des hö-

hern Calculs, etwas gründliches, und vielleicht noch mehr, etwas neues und vollkommnes zu liefern Im hellsten Lichte aber zeigt sich diese Herablassung in Auseinandersetzungen wie folgende.

Berechnung der Währung des Ganges einer Uhr.

Wenn das große Rad sich einmal in einer Stunde herum beweget, so sind die Umgänge mit der Währung gleich; gehen aber auf einen Umgang des großen Rades mehr oder weniger als eine Stunde, so ist die Währung der Uhr größer oder kleiner, als die Umgänge.

Wenn die Währung der Uhr mit den Umgängen des großen Rades dividiret wird, so kommt die Zeit, darin sich das große Rad einmal herum bewegt, heraus. Z. B. die Währung der Uhr sey 30 Stunden, die Umgänge des großen Rades 6.

6 | 30 | 5 Stunden.
| 0 |

Dividirt man hingegen die Umgänge des großen Rades, oder der Schnur mit der Wäh-

rung der Uhr, so kommt die Bewegung des großen Rades in einer Stunde heraus. Z. B.

$$30 \,|\, 6 \,| = \overset{6}{\smile}\; \tfrac{6}{30} \,|\, \tfrac{1}{5} \text{ in einer Stunde.}$$

Wird aber die Währung der Uhr mit der gegebenen Zeit, darin sich das große Rad einmal herum beweget, dividirt, so kommen die Umgänge des großen Rades heraus. Z. B. es gehe eine Uhr 30 Stunden, und das große Rad gehe in 5 Stunden einmal herum.

$$5 \left| \frac{30}{0} \right| 6 \text{ Umgänge.}$$

Wenn die gegebene Länge der Schnur oder Umgänge multiplicirt werden mit der Zeit, darin sich das große Rad einmal herum beweget, so zeigt das Faktum die Stunden an, wie lange das Gehewerk gehen könne. Z. B.

$$\begin{array}{r} 6 \\ \underline{5} \\ 30 \end{array} \text{ Stund-Währung der Uhr.}$$

Und wenn an einer Sackuhr die Umgänge der conischen Schnecke mit der gegebenen Zeit, darin sich das Rad einmal herum beweget, multipliciret werden, so kommt auch die Zeit heraus, wie lange die Sackuhr gehe.

Wäre aber anstatt der Zeit, darin sich das große Rad einmal herum beweget, der Umlauf des großen Rades in einer Stunde gegeben, so dividire man die gegebenen Umgänge mit dem Umlaufe des großen Rades in einer Stunde. Dieser Quotient zeiget an, wie lange das Gehewerk gehen könne. Z. B.

$\frac{1}{4}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{6}{1}$ = 30 Stunde.

Wer sich bey solchen Erläuterungen nicht in die Zeit zurück denkt, in welcher er der edlen Rechenkunst oblag, und von einem Meister derselben in die Geheimnisse der welschen Practica und deren Anwendungen eingeweihet wurde, dessen Phantasie darf warlich keinen Anspruch auf das Lob der Lebhaftigkeit machen. Und nach diesen Proben, welche nebenher auch mit dem Style des Hrn. V. bekannt machen können, wird es weiter keinem Zweifel unterworfen seyn, ob und wie sehr man nach der Fortsetzung zu verlangen Ursache habe?

Berlin und Libau, bey Lagarde und Friedrich.

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur Differenzial=Rechnung. Aus dem Lateini=

schen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von J. A. C. Michelsen. Erster Theil, 1790. Die Uebersetzung 280, die Anmerkungen und Zusätze 120, und die Vorreden 80, zusammen 480 S. gr. 8. 1 thlr. 12 gr.

Man kennt den Werth der Anleitung zur Differenzial-Rechnung des unsterblichen Euler, und ich habe daher bloß nöthig, etwas weniges von meinen Anmerkungen und Zusätzen, von meiner Vorrede und den zu der Vorrede des Verfassers hinzugefügten Anmerkungen zu sagen. Ich habe dabey vorzüglich auf diejenigen Rücksicht genommen, welche das erwähnte classische Werk bey der Erlernung der Differenzial-Rechnung gebrauchen wollen, aber dem ersten Theile noch nicht alles dasjenige beyfügen können, was erforderlich ist, wenn nirgends Dunkelheiten, und noch weniger Schwierigkeiten, zurückbleiben sollen. Meiner Meynung nach würde es für Schüler der Differenzial-Rechnung am vortheilhaftesten seyn, wenn sie erst die Eulerische Anleitung, dann meine Anmerkungen und Zusätze, nun meine Vorrede, und zuletzt die Vorrede des Verfassers mit meinen Anmer-

kungen läsen. Wo ich in den Anmerkungen und Zusätzen auf Theorien Rücksicht nehmen mußte, die eine Widerlegung verdienten, so wie auch da, wo ich meine Leser den Weg der eigenen Entwickelung vorangehend führen wollte, bin ich vielleicht manchmal weitläuftiger gewesen, als es einige verlangen; ich hoffe indeß, wenigstens den Fehler einer zu großen Weitläuftigkeit vermieden zu haben. Was den Inhalt meiner Zusätze betrifft, so zeige ich hier bloß an, daß ich darin unter andern darzuthun gesucht habe, daß die Mathematik nie unendliche, sondern allenthalben endliche Größen untersuche, und daß also alle Schwierigkeiten, welche in der Differenzial- und Integral-Rechnung aus der Annahme unendlich großer und unendlich kleiner Größen entstanden sind, bey einer genauern Entwickelung gänzlich verschwinden. Auch habe ich die genannten Rechnungen von dem Vorwurfe zu befreyen mich bemühet, als seyen ihre Beweise und ihre Auflösungen nicht so strenge, als die der Elementar-Mathematik; und sollte das, was ich in dieser Absicht mitgetheilt habe, hier und da noch nicht bündig genug scheinen,

so hoffe ich in den Zusätzen zu dem folgenden zweyten Theile das etwa fehlende reichlich zu ersetzen. Um bey dieser Gelegenheit meine Leser von der Erscheinung dieses zweyten Theils zum voraus zu benachrichtigen, so wird die erste Hälfte desselben, zu welcher neun Capitel des Originals und ohngefähr zwölf Bogen Zusätze bestimmt sind, und der bereits unter der Presse ist, in der nächsten Michaelis-Messe; und die andere eben so viel von dem Originale und eben so viel Zusätze enthaltende Hälfte in der Ostermesse des künftigen Jahres zu haben seyn. Den Beschluß werde ich in der Michaelis-Messe 1791 mit einem dritten Theile machen, welcher die Anwendung und den Gebrauch der Differenzial-Rechnung in der Geometrie in sich fassen, und dem Eulerischen Werke noch einen höhern Grad der Vollständigkeit und Brauchbarkeit geben soll.

Göttingen, bey Vandenhoek und Ruprecht. Geometrische Abhandlungen. Erste Sammlung. Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie, von Abraham Gotthelf

Kästner. Der mathematischen Anfangsgründe 1sten Theils 3te Abtheilung, mit 9 Kupfern, 1790. 580 S. 8. 1 rthl. 6 gr.

Ich habe dieses Buch in der dem ersten Stücke dieser Beyträge vorgesetzten Vorrede ein Hauptbuch genannt, und darin stimmen gewiß alle wahre Liebhaber der Mathematik mit mir überein. Um so weniger aber darf ich das, was ich darüber zu sagen habe, auf den wenigen hier mir übrigen Seiten zusammenfassen, sondern muß mich begnügen, jetzt kurz den Inhalt mitzutheilen, und das Uebrige dem nächsten Stücke vorzubehalten. Man findet also darin: Eine Nachricht von Gerberts Geometrie, 1—18; Aufgaben aus der ebenen Geometrie, 19—52; Porismen, 53—74; Winkelbewegungen, 75—98; Untersuchungen, einzelne Dreyecke betreffend, 99—220; Vergleichungen von Winkeln und Sehnen, 221—367; Feldmesseraufgaben, 368—410; Höhenmessungen, 411—428; Ausrechnungen und Theilungen von Figuren, 429—447; Verschiedenes zur ebenen Trigonometrie, 448 bis zu Ende; und unter diese Haupttitel hat der Herr Verf.

sechzig Aufsätze gebracht, wodurch er sich, so wie durch alle seine übrigen Schriften, auf den Dank aller Freunde der Mathematik ein großes Recht erworben. Die nähere Anzeige dieser Aufsätze, nebst verschiedenen dadurch bey mir veranlaßten Betrachtungen, sollen nächstens folgen.

S. 99. Z. 13. lese man auf LD statt auf BD.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Michelsen, Johann Andreas Christian,

Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik insbesondere für Schullehrer und Praktiker

Bd.: 1,2

Berlin (1790)

Math.u. 131-1,1/4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594138-0
VD18 80341403-001